CAT – Caucasia

Guía de Actividad Independiente No 3

NOMBRE DE LA ASIGNATURA:	**Ecuaciones Diferenciales**	**TUTOR:**	Deivis Galván Cabrera
Nombre del estudiante:			

CONCEPTO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes. Son ejemplos de ecuaciones diferenciales las siguientes:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+3y=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(1+\frac{dy}{dx})^3$$

$$f(x)+f'(x)-7x=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

$$y'=3x$$

$$y'-\cos(x)=0$$

$$y'''-y=3x+2$$

$$x\frac{\delta y}{\delta x}+5=0$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6$$

En los anteriores ejemplos se observa que las ecuaciones cumplen la definición de ecuación diferencial, porque tienen derivadas de diferente orden y tipo (ordinarias y parciales), además en los ejemplos se observan diferentes notaciones de derivada como lo hemos aprendido en el

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una función ***y* = *f(x)*** se dice que es una solución de una ecuación diferencial si al sustituir **y** sus derivadas en la ecuación la reduce a una identidad. Por ejemplo, derivando y sustituyendo es fácil comprobar que $y = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Se puede demostrar que toda solución de esta ecuación diferencial es de la forma $y = C\,e^{-2x}$, solución general.

Donde **C** denota cualquier número real.

Derivando la ecuación $y = C\,e^{-2x}$ derivando $y' = -2C\,e^{-2x}$

Reemplazando en la ecuación diferencial la función y su respectiva derivada, efectivamente existe una identidad $-2C\,e^{-2x} = -2C\,e^{-2x}$

Ejemplo: Averiguar si las funciones dadas son solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

a) *y = sen x* b) ***y = e^{2x}*** c) ***y = 4e^{–x}*** d) ***y = C e^x***

Averigüemos:

*a) Como**: y = sen (x)***

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -sen(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = -sen\,x - sen\,x = -2\,sen\,x \neq 0$$

Por tanto, no es solución.

*b) Como **y = e^{2x}***

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{2x} \text{ entonces}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 4e^{2x} - e^{2x} = 3e^{2x} \neq 0$$

Por tanto, y = e^{2x} no es solución.

*c) Como **y = 4 e^{-x}***

$$\frac{dy}{dx} = -4e^{-x} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{-x} \text{ entonces}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0$$

Por tanto, y = 4 e^{-x} es solución.

*d) Como **y = C e^x***

$$\frac{dy}{dx} = Ce^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ce^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = Ce^x - Ce^x = 0$$

Por tanto, y = C e^x es solución.

Ejemplo: Solución particular

Para la ecuación diferencial **x (dy/dx) - 3y = 0** verificar que **y = Cx³** es solución y hallar la solución particular determinada por la condición inicial ***y = 2*** para cuando **x = -3**

Solución:

Sabemos que $y = Cx^3$ es una solución, ya que $y' = 3Cx^2$, por lo tanto:

$x\,(dy/dx) - 3y = xy' - 3y = x(3Cx^2) - 3(Cx^3) = 3Cx^3 - 3Cx^3 = 0$

Además, la condición inicial ***y = 2*** cuando ***x = -3*** implica que la solución general esta dada por: ***y = C x³***, al remplazar el valor de x que es la condición inicial se tiene:

$2 = (-3)^3 C$ por tanto ***$C = -2/27$***

Luego concluimos que la solución particular es: $y = -2x^3/27$

Para determinar una solución particular, el número de condiciones iníciales ha de coincidir con el de constantes arbitrarias en la solución general.

Recordemos que la solución de una ecuación diferencial no es una sola función, sino todo un conjunto de funciones (familia de soluciones).

Ejemplo:

$\mathbf{y = x^{4/3} + c}$ *es la solución general de* $y' - x^3 = 0$

Derivando y Tenemos: $y' = x^3$ *al sustituir en la ecuación diferencial, la convierte en una identidad* $x^3 - x^3 = 0$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas o familia de soluciones, una para cada valor asignado a la constante arbitraria **C**.

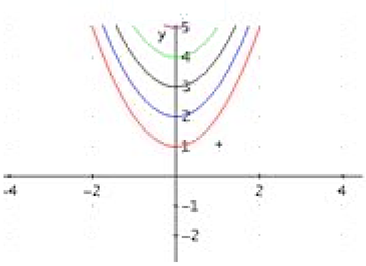
El término "condiciones iníciales" proviene de que, con frecuencia, en problemas donde interviene el tiempo, se conoce el valor de la variable dependiente o de alguna de sus derivadas en el instante inicial $t = 0$

El problema de valor inicial implica hallar la solución de una ecuación diferencial sujeta a una condición inicial $Y(X_0) = Y_0$, y es el punto de partida para encontrar la familia de curvas.

Cabe aclarar que la solución del problema de valor inicial no es una familia de curvas, sino una curva de ellas que cumple las condiciones.

Ejemplo:

Al resolver la ecuación diferencial y'=2x es fácil observar que la solución general es $y = x^2 + c$ generando una familia de curvas (familia de parábolas) y al dar una condición inicial se obtiene de esa familia de curvas una única curva, por ejemplo con la condición inicial $y(2) = 5$ tenemos que $C=1$ por tanto la curva es $\mathbf{y = x^2+1}$ (veamos la gráfica demostrativa):



Gráfica de color rojo es la única curva que satisface las condiciones iníciales y las otras curvas pertenecen a la familia de curvas solución.

Gráfica 1

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales se clasifican por tipo, orden y linealidad.

4.1 Clasificación por Tipo:

Si una ecuación contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO):

Ejemplo:

$$\text{a) } \frac{dy}{dx}+3y=e^{x}\ ,\quad \text{b) } \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+3y=0,$$

Si una ecuación con derivadas de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial (EDP)

Ejemplo:

$$\text{a) } \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y}{dz^2}=0,\quad \text{b) } \frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial v^2}-\frac{\partial u}{\partial v},\quad \text{c) } \frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}=0$$

En estos estos ejemplos se nota que existen más de dos variables independientes, contrario a las ecuaciones diferenciales ordinarias que solo tiene una variable independiente.

4.2. Clasificación según el orden:

El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la derivada mayor en la ecuación:

Por ejemplo:

a) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3y=0$, esta ecuación es de orden 2, no debe confundirse con el exponente 3 que esta definido para la derivada de orden 1. Y como para el orden se debe tener en cuenta el mayor orden entonces el orden es 2.

b) y'''+ 3y'' - 3y' - y = 0 es una ecuación de orden 3

c) M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 es una ecuación diferencial de orden 1, porque hay que tener en cuenta que y' = dy/dx.

4.3. Clasificación según la Linealidad:

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si F es lineal en y, y',..., $y^{(n)}$. Esto significa que una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal cuando F (x, y, y',..., $y^{(n)}$) = 0 es:

$$a_n(x)y^n+a_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$$

En la combinación aditiva en el lado izquierdo de la anterior podemos afirmar que:

La variable dependiente "y" y todas sus derivadas y', y'',..., $y^{(n)}$ son de primer grado. Y los coeficientes a_0, a_1,..., a_n dependen solo de la variable x.

Los ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales se tienen las siguientes:

a) $y''+xy'-3y=e^{2x}$, b) y''' + y'' + y = 0, c) (1-x) y'' - 4xy' + 5y = cos x

Los ejemplos de ecuaciones no lineales tenemos:

a) (1-y) y'' - 2y= e^x, es una ecuación diferencial no lineal porque el coeficiente de la variable dependiente y'' también depende de y.

b) y'' + sen y = 0 Es una ecuación diferencial no lineal porque la función seno es función de y

c) y'' + y^2 = 0, es una ecuación diferencial no lineal porque la potencia de la variable y es 2, y no 1 para que sea lineal.

d) $(y''')^3$ + xy'' - 3y = 0, es una ecuación diferencial no lineal porque la potencia de la variable y''' es 3 y para ser lineal debe ser 1

EJERCICIOS PROPUESTOS

A. Clasificar las ecuaciones diferenciales de acuerdo con su tipo y orden:

1) $\frac{dy}{dx}+3xy=x^2$

2) *y''+2y+y = 0*

3) $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-4x=e^t$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{du}{dt}=\sec(t)$

5) $(\frac{d^2y}{dx^2})^2+3(\frac{dy}{dx})-4y=0$

B. Verificar que la función dada es solución de la ecuación diferencial.

1. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$, $\frac{d^2y}{dx^2}+y=o$

2. $y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$, $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$

C. Hallar la solución particular que pasa por el punto (-4,4)

$y^2 = Cx^3$, $2x(\frac{dy}{dx})-3y=0$