UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

ALGEBRA LINEAL

TRANSVERSAL

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Vicerrectoría de Educación a Distancia y virtual

2016

AUTOR

Pablo Emilio Botero Tobón
pbotero@uniremington.edu.co

Nota: el autor certificó (de manera verbal o escrita) No haber incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario eximió de toda responsabilidad a la Corporación Universitaria Remington, y se declaró como el único responsable.

RESPONSABLES

Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño
Decano de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería
jsepulveda@uniremington.edu.co

Eduardo Alfredo Castillo Builes
Vicerrector modalidad distancia y virtual
ecastillo@uniremington.edu.co

Francisco Javier Álvarez Gómez
Coordinador CUR-Virtual
falvarez@uniremington.edu.co

GRUPO DE APOYO

Personal de la Unidad CUR-Virtual
EDICIÓN Y MONTAJE

Primera versión. Febrero de 2011.
Segunda versión. Marzo de 2012
Tercera versión. noviembre de 2015
Cuarta versión 2016

TABLA DE CONTENIDO

1 MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS III

PROPÓSITO GENERAL DEL MÓDULO

El álgebra lineal es una herramienta de uso cotidiano en la elaboración de diseños y la implementación y desarrollo de proyectos. El manejo de la conceptualización y aplicación de este modelo permitirá un ejercicio versátil de la acción en las diferentes áreas del conocimiento.

OBJETIVO GENERAL

Analizar la representación matricial del modelo lineal para la optimización del manejo operativo del mismo, describiendo las técnicas matriciales para la solución de sistemas de ecuaciones lineales y modelando situaciones reales por medio de sistemas de ecuaciones con sus respectivas soluciones.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

UNIDAD 1

Analizar las características y la forma de los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, explicando los diferentes métodos utilizados para la solución de los mismos (Métodos: Reducción, igualación, sustitución y gráfico) y aplicarlos en diferentes situaciones problémicas.

UNIDAD 2

Interpretar el concepto de matriz, entradas de una matriz, orden de una matriz, matriz cuadrada, entre otros y algunos tipos de matrices especiales, identificando, también, las características que deben cumplirse para que dos matrices puedan ser iguales, así como la explicación de las diferentes operaciones que pueden efectuarse con matrices.

UNIDAD 3

Desarrollar las técnicas analíticas para solucionar sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial, explicando, además, en qué consisten los sistemas consistentes e inconsistentes y el algoritmo para la solución de sistemas de ecuaciones lineales por los métodos: Eliminación Gaussiana, Eliminación Gauss – Jordán, Matriz inversa y determinantes.

UNIDAD 4

Desarrollar las técnicas que peritan la manipulación de vectores en R2 y R3, calculando, además, la norma y los ángulos directores de un vector, las diferentes operaciones con vectores; determinando, también las diferentes ecuaciones de una recta en el espacio, la ecuación de los diferentes planos, las ecuaciones de una recta en el espacio y la ecuación de un plano en el espacio, la forma de graficarlos y cómo se identifican los planos paralelos.

2 UNIDAD 1 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2

2.1.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar las características y la forma de los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, explicando los diferentes métodos utilizados para la solución de los mismos (Métodos: Reducción, igualación, sustitución y gráfico) y aplicarlos en diferentes situaciones problémicas.

2.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Describir las características de los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Solucionar ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando los métodos de: Reducción, igualación, sustitución y gráfico; se explica, además, la forma de enfrentarse a diferentes situaciones problémicas que se resuelven planteando sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

2.2 CONCEPTOS RELACIONADOS CON SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

SISTEMA DE ECUACIONES:

“Es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas” BALDOR

Un sistema de ecuaciones consiste en varias ecuaciones con varias incógnitas. Cuando el sistema tiene dos ecuaciones lineales con dos incógnitas recibe el nombre de sistema lineal **2X2**.

Por ejemplo: El sistema $\begin{cases} \boldsymbol{2x+3y=-5} \\ \boldsymbol{x+4y=-10} \end{cases}$ Es un sistema 2x2

Solucionar un sistema 2x2es encontrar las parejas $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ que al reemplazarlas en la ecuación se obtiene **una identidad**, es decir una igualdad verdadera:

Al solucionar un sistema de ecuaciones puede suceder:

- **Que el sistema tenga una única solución**, en este caso se encuentra un valor para cada incógnita.

- **Que el sistema no tenga solución**, esto se presenta cuando en el proceso de solución del sistema se llega a **una igualdad falsa**. No hay valor para cada incógnita que al remplazarlos en cada ecuación produzca identidades.

- **Que el sistema tenga infinitas soluciones**, esto se presenta cuando en el proceso de solución del sistema llegamos a una **igualdad verdadera (o a una identidad)**. Existen muchos valores para cada incógnita que al remplazarlos en cada ecuación se producen identidades.

2.2.1 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS O SISTEMA 2X2.

Para solucionar sistemas **2x2**, se utilizan cinco métodos diferentes que son:

- **Método gráfico.**
- **Método por igualación.**
- **Método por sustitución.**
- **Método por reducción.**
- **Método por regla de Cramer o determinantes.**

1. **<u>Método gráfico</u>:**

Este método consiste en graficar en un mismo plano cartesiano cada ecuación, y luego determinar **las coordenadas del punto de corte**, los valores $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ de dicho punto corresponden a la solución del sistema.

Se presentan tres casos posibles para las gráficas de las ecuaciones de un sistema:

a. **Las rectas se intersecan en un solo punto**: Son las coordenadas del punto de corte.

b. **Las ecuaciones describen la misma recta:** Cuando al graficar ambas rectas solo se observa una sola, esto quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones.

c. **Las dos rectas son paralelas**”: Cuando las rectas son paralelas, es decir no se cortan, esto quiere decir que el sistema no tiene solución.

Nota: No olvide que para graficar una línea recta, es suficiente con conocer las **coordenadas de dos puntos** sobre la línea recta, en muchos casos estas coordenadas corresponden a las intersecciones con los ejes.

2.2.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Utilizando el método gráfico solucione los siguientes sistemas **2x2:**

1.

$$\begin{aligned} x+y&=-1 \rightarrow Ecuación\ 1 \\ 3x+y&=3 \rightarrow Ecuación\ 2 \end{aligned}$$

Procedimiento

a. Se realiza la gráfica de cada una de las líneas rectas, asignándole valores a x para obtener el correspondiente de y, se tomarán las intersecciones con los ejes, esto es:

- Puntos para graficar: $x+y=-1$

PUNTOS INTERCEPTOS SOBRE LOS EJES COORDENADOS	ECUACIÓN 1 $x+y=-1$	PUNTO PARA REPRESENTAR
$Si\ x=0$	$0+y=-1 \rightarrow y=-1$	$(0,-1)$
$Si\ y=0$	$x+0=-1 \rightarrow x=-1$	$(-1,0)$

- Puntos para graficar: $3x+y=3$

PUNTOS INTERCEPTOS SOBRE LOS EJES COORDENADOS	ECUACIÓN 2 $3x+y=3$	PUNTO PARA REPRESENTAR
$Si\ x=0$	$3*(0)+y=3 \rightarrow y=3$	$(0,3)$
$Si\ y=0$	$3x+0=3 \rightarrow x=1$	$(1,0)$

➢ La gráfica la podemos ver en la figura1:

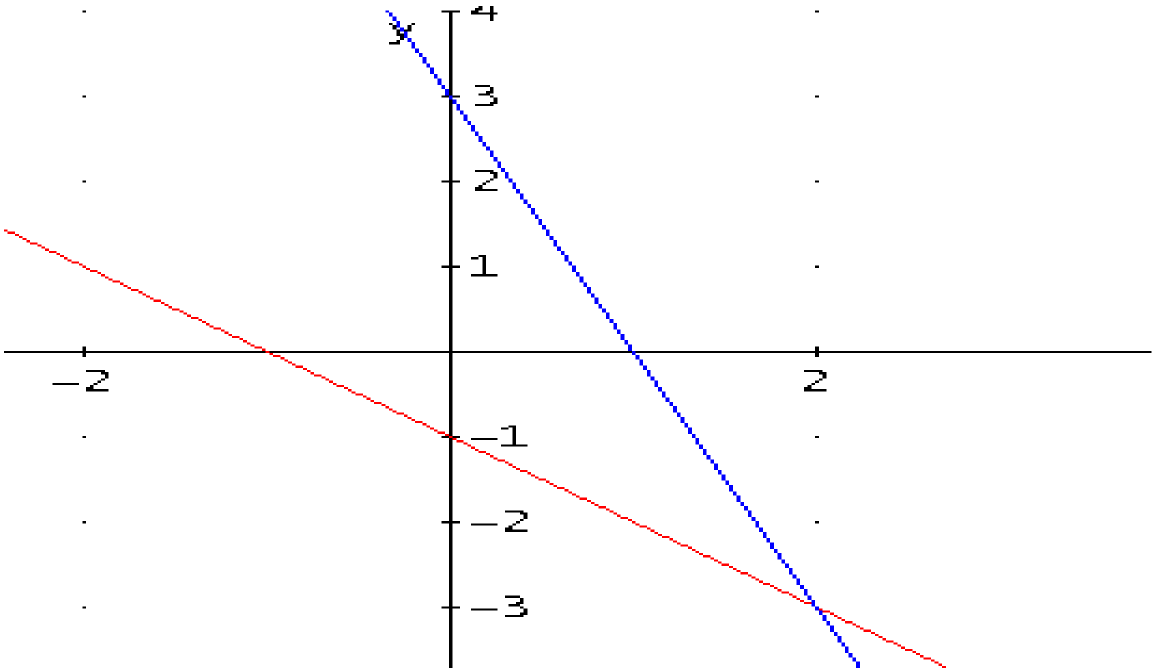


Figura 1.

Se puede observar que las dos rectas se cortan en el punto $\boldsymbol{x=2 \wedge y=-3}$

- **Prueba**: Se reemplazan los puntos del intercepto en cada una de la ecuaciones dadas:
  - **ECUACIÓN 1:**

$$\boldsymbol{x+y=-1 \to (2)+(-3)=-1 \to 2-3=-1 \to -1=-1}$$

Lo cual **es verdadero.**

  - **Ecuación 2:**

$$\boldsymbol{3x+y=3 \to 3(2)+(-3)=3 \to 6-3=3 \to 3=3}$$

Lo cual **es verdadero.**

b. Por lo tanto la solución del sistema es:

$\boldsymbol{x=2 \wedge y=-3,}$ el punto p de coordenadas $\boldsymbol{p(2,-3)}$

---

2. $\boldsymbol{2x+y=3 \to Ecuación\ 1}$
$\boldsymbol{x+y=4 \to Ecuación\ 2}$

Procedimiento

c. Se realiza la gráfica de cada una de las líneas rectas, asignándole valores a $\boldsymbol{x}$ para obtener el correspondiente de $\boldsymbol{y}$**,** se tomarán las intersecciones con los ejes, esto es:

- Puntos para graficar: $\mathbf{2x + y = 3}$

PUNTOS INTERCEPTOS SOBRE LOS EJES COORDENADOS	ECUACIÓN 1 $\mathbf{2x+y=3}$	PUNTO PARA REPRESENTAR
$Si\ x = 0$	$\mathbf{2(0) + y = 3 \rightarrow y = 3}$	$(0,3)$
$Si\ y = 0$	$\mathbf{2x + 0 = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}}$	$\left(\frac{3}{2},0\right)$

- Puntos para graficar: $\mathbf{x + y = 4}$

PUNTOS INTERCEPTOS SOBRE LOS EJES COORDENADOS	ECUACIÓN 2 $\mathbf{x+y=4}$	PUNTO PARA REPRESENTAR
$Si\ x = 0$	$\mathbf{0 + y = 4 \rightarrow y = 3}$	$(0,4)$
$Si\ y = 0$	$\mathbf{x + 0 = 4 \rightarrow x = 4}$	$(4,0)$

La gráfica de estas dos rectas se puede ver en la **figura 2**

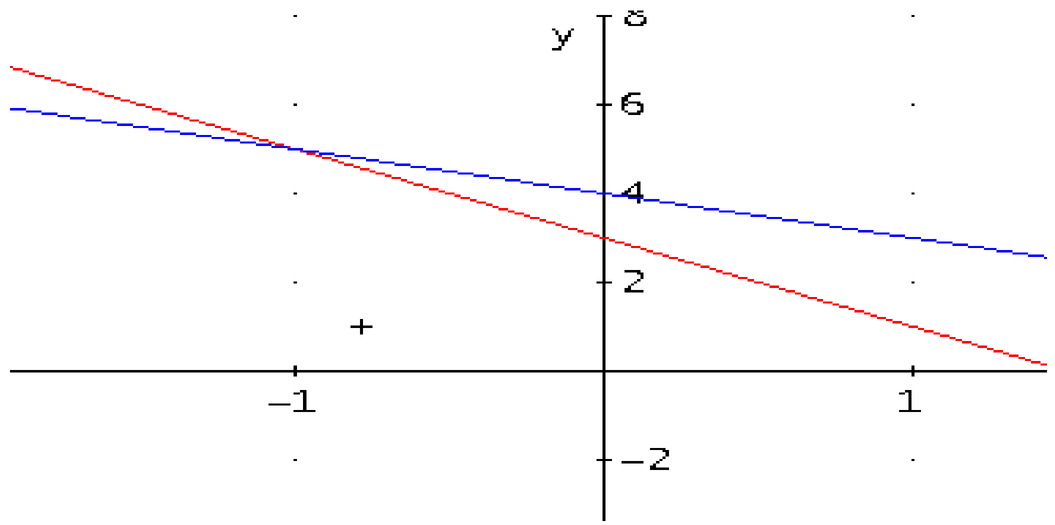


Figura 2.

Se puede observar que las dos rectas se cortan en el punto $\mathbf{x = -1} \wedge \mathbf{y = 5}$

El punto de coordenadas: $(\mathbf{-1, 5})$

- Prueba en : $2x + y = 3 \rightarrow Ecuación\ 1$.

$$2(-1) + (5) = 3 \rightarrow -2 + 5 = 3$$

$3 = 3$ Verdadero

- Prueba en: $x + y = 4 \rightarrow Ecuación\ 2$

$$(-1) + (5) = 4 \rightarrow -1 + 4 = 5$$

$4 = 4$ Verdadero

b. Por lo tanto la solución del sistema es:

$x = -1 \wedge y = 5$**,** el punto **p** de coordenadas $p(-1, 5)$

---

3. $x + y = 8$
$x + y = 12$

a. La representación gráfica de estas dos ecuaciones se ve en la **figura 3.**

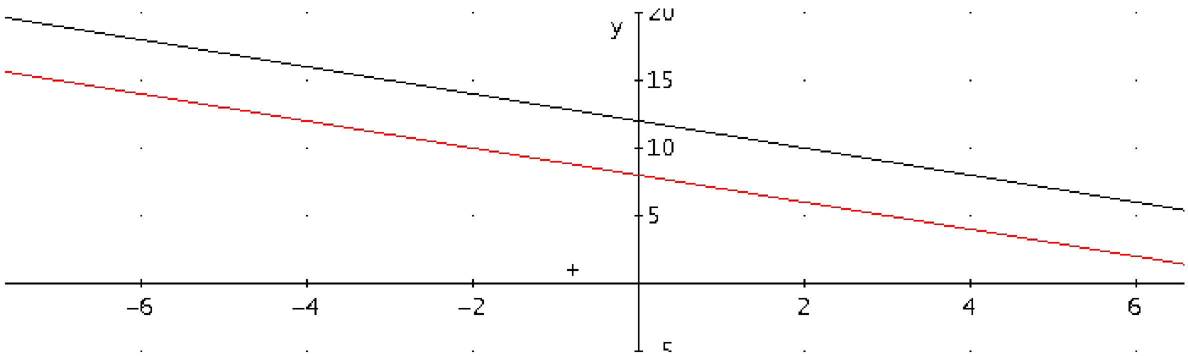


Figura 3

Se puede ver que estas dos rectas **son paralelas**, es decir no se cortan por lo tanto **el sistema no tiene solución.**

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que: La pendiente de una línea recta está dada por el coeficiente de ***X*** y en ambas ecuaciones el coeficiente es ***1.***

4. $\boldsymbol{x+y=4}$
$\boldsymbol{2x+2y=8}$

a. La representación gráfica de estas dos ecuaciones se puede observar en la **figura 4**.

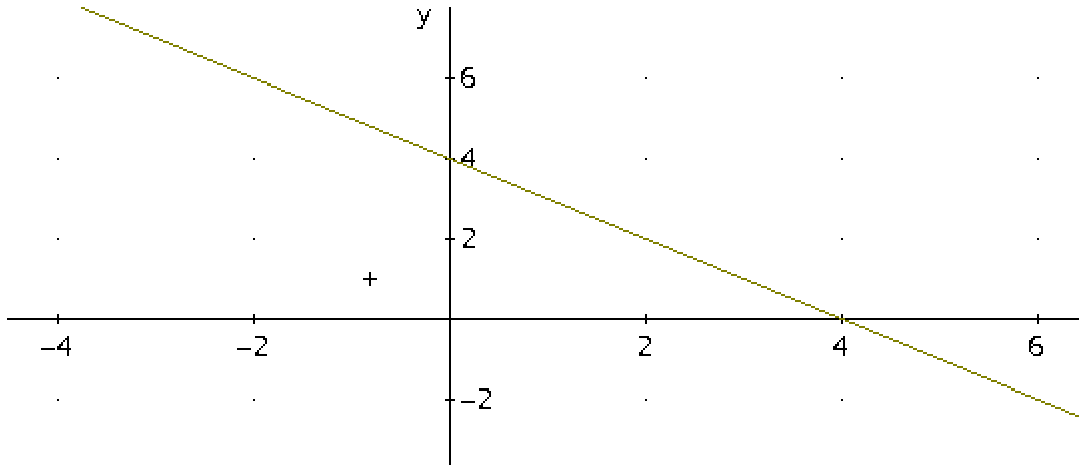


Figura 4

b. Sólo se observa una sola recta, ya que **las dos rectas coinciden**, esto quiere decir que el sistema tiene **infinitas soluciones**.

NOTA: La forma de indicar las soluciones de un sistema de ecuaciones, cuando este tiene infinitas soluciones, se analizará en la unidad 3

---

2. **Método igualación.**

Se analizará el método a través de algunos ejemplos:

2.2.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Solucione los siguientes sistemas 2 X 2 utilizando el método igualación:

1. $\boldsymbol{3x+2y=5}$
$\boldsymbol{4x+3y=12}$

a. Procedimiento:

Nota: Es conveniente que enumere cada ecuación y cada resultado obtenido:

$$\boldsymbol{3x+2y=5\ \ Ecuación 1}$$
$$\boldsymbol{4x+3y=12\ \ Ecuación\ 2}$$

b. Se despeja **la misma variable** de ambas ecuaciones:

- De la $\boldsymbol{Ecuación1}$ se despeja $\boldsymbol{x}$**:**

$$\boldsymbol{3x+2y=5 \rightarrow 3x=5-2y \rightarrow x=\frac{5-2y}{3} Ecuación\ 3}$$

- De la $\boldsymbol{Ecuación\ 2}$ se despeja $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{4x+3y=12 \rightarrow 4x=12-3y \rightarrow x=\frac{12-3y}{4} Ecuación\ 4}$$

c. Se igualan las dos ecuaciones anteriores, Para el ejemplo vamos a igualar la $\boldsymbol{Ecuación\ 3}$ con la $\boldsymbol{Ecuación\ 4}$:

$$\boldsymbol{\frac{5-2y}{3}=\frac{12-3y}{4}}$$

c. Se soluciona esta ecuación para $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{\frac{5-2y}{3}=\frac{12-3y}{4} \rightarrow 4*(5-2y)=3*(12-3y) \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{20-8y=36-9y \rightarrow -8y+9y=36-20 \rightarrow y=16\ Ecuación\ 5}$$

d. Se reemplaza el resultado anterior en cualquiera de las ecuaciones anteriores, preferiblemente en la ecuación 3 o en la ecuación 4 (ya está despejada la $\boldsymbol{x}$) .

- Se reemplaza la ecuación **5** en la ecuación **3**:

$\boldsymbol{y=16\ \ ecuación\ 5}$ $\boldsymbol{x=\frac{5-2y}{3}\ \ ecuación\ 3}$

$$\boldsymbol{x=\frac{5-2(16)}{3} \rightarrow\ \ x=\frac{5-32}{3} \rightarrow\ \ x=\frac{-27}{3} \rightarrow\ \ x=-9}$$

e. Se debe dar la prueba en las ecuaciones originales con $x=-9 \wedge y=16$

- Prueba en la **ecuación 1**:

$$\boldsymbol{3x+2y=5\ \ Ecuación1}$$

$$\boldsymbol{3(-9)+2(16)=5 \rightarrow -27+32=5 \rightarrow}$$

$$\boldsymbol{5=5\ Verdadero}$$

–

- Prueba en **la ecuación 2**:

$$4x + 3y = 12 \;\; Ecuación\ 2$$

$4(-9) + 3(16) = 12 \rightarrow -36 + 48 = 12 \rightarrow$

$$12 = 12 \;\; Verdadero$$

Por lo tanto la solución del sistema es:

$x = -9 \wedge y = 16$ El punto p de coordenadas $p(-9, 16)$

---

2. $4x - 3y = 15\ Ecuación\ 1$
$7x + 3y = -10\ Ecuación\ 2$

Procedimiento

$$4x - 3y = 15 \;\; Ecuación 1$$
$$7x + 3y = -10 \;\; Ecuación\ 2$$

f. Se despeja **la misma variable** de ambas ecuaciones:

- De la $Ecuación 1$ se despeja x:

$4x - 3y = 15 \rightarrow 4x = 15 + 3y \rightarrow x = \dfrac{15 + 3y}{4}\ Ecuación\ 3$

- De la $Ecuación\ 2$ se despeja x:

$7x + 3y = -10 \rightarrow 7x = -10 - 3y \rightarrow x = \dfrac{-10 - 3y}{7} Ecuación\ 4$

g. Se igualan las dos ecuaciones anteriores, Para el ejemplo vamos a igualar la $Ecuación\ 3$ con la $Ecuación\ 4$:

$$\frac{15 + 3y}{4} = \frac{-10 - 3y}{7}$$

c. Se soluciona esta ecuación para y:

$\dfrac{15 + 3y}{4} = \dfrac{-10 - 3y}{7} \rightarrow 7 * (15 + 3y) = 4 * (-10 - 3y) \rightarrow$

$105 + 21y = -40 - 12y \rightarrow 21y + 12y = -105 - 40 \rightarrow 33y = -145$

$$y=\frac{-145}{33}\rightarrow y=-\frac{145}{33}\,Ecuación\ 5$$

h. Se reemplaza el resultado anterior en cualquiera de las ecuaciones anteriores, preferiblemente en la ecuación 3 o en la ecuación 4 (ya está despejada la x) .

- Se reemplaza la ecuación **5** en la ecuación **3**:

$$y=-\frac{145}{33}\,Ecuación\ 5 \qquad x=\frac{15+3y}{4}\quad ecuación\ 3$$

$$x=\frac{15+3*\left(-\frac{145}{33}\right)}{3}\rightarrow\ x=\frac{15-\frac{145}{11}}{4}\rightarrow x=\frac{\frac{165-145}{11}}{4}$$

$$\rightarrow\ x=\frac{20}{4*11}\rightarrow\ x=\frac{5}{11}$$

i. Se debe dar la prueba en las ecuaciones originales con $x=-9\wedge y=16$

- Prueba en la **ecuación 1**:

$$4x-3y=15\ \ Ecuación1$$

$$4\left(\frac{5}{11}\right)-3\left(-\frac{145}{33}\right)=\frac{20}{11}+\frac{145}{11}=15\rightarrow\frac{165}{11}=15\rightarrow$$

$$15=15\ Verdadero$$

–

- Prueba en **la ecuación 2:**

$$7x+3y=-10\ \ Ecuación\ 2$$

$$7\left(\frac{5}{11}\right)+3\left(-\frac{145}{33}\right)=-10\rightarrow\frac{35}{11}-\frac{145}{11}=-10\rightarrow\frac{35-145}{10}=-10\rightarrow$$

$$-10=-10\ Verdadero$$

Por lo tanto la solución del sistema es:

$x=\frac{5}{11}\wedge y=-\frac{145}{33}$ El punto p, de coordenadas $p\left(\frac{5}{11},-\frac{145}{33}\right)$

---

3. $5x-3y=1\ Ecuación\ 1$
$10x-6y=8\ Ecuación\ 2$

Procedimiento

$$5x - 3y = 1 \;\; Ecuación 1$$
$$10x - 6y = 8 \;\; Ecuación\ 2$$

j. Se despeja **la misma variable** de ambas ecuaciones:

- De la $Ecuación 1$ se despeja x:

$$5x - 3y = 1 \rightarrow 5x = 1 + 3y \rightarrow x = \frac{1+3y}{5} Ecuación\ 3$$

- De la $Ecuación\ 2$ se despeja x:

$$10x - 6y = 8 \;\; Ecuación\ 2 \rightarrow 10x = 8 + 6y \rightarrow$$

$$x = \frac{8+6y}{10} Ecuación\ 4$$

k. Se igualan las dos ecuaciones anteriores, Para el ejemplo vamos a igualar la $Ecuación\ 3$ con la $Ecuación\ 4$:

$$\frac{1+3y}{5} = \frac{8+6y}{10}$$

c. Se soluciona esta ecuación para y:

$$\frac{1+3y}{5} = \frac{8+6y}{10} \rightarrow 10 * (1+3y) = 5 * (8+6y) \rightarrow$$

$$10 + 30y = 40 + 30y \rightarrow 30y - 30y = 40 - 10 \rightarrow$$

$$0 = 30 \; Falso$$

Se eliminó la variable y se llegó a una **igualdad falsa**, esto quiere decir que el sistema **no tiene solución**.

---

3. **Método sustitución.**

Se analizará el método a través de algunos ejemplos:

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Solucione el siguiente sistema 2x2.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$$

Procedimiento

a. Para identificar las ecuaciones es conveniente numerarlas:

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = -5 \; \textit{Ecuación } 1} \\ \mathbf{x + 4y = -10 \; \textit{Ecuación } 2} \end{cases}$$

b. De una de las ecuaciones despeje una de las variables. Por facilidad despeje de la ecuación #2 la $\boldsymbol{x}$, queda:

De ecuación #2: $\mathbf{x + 4y = -10 \rightarrow x = -10 - 4y \; \textit{Ecuación } 3},$

c. La ecuación obtenida (ecuación 3) se reemplaza en la ecuación 1 (se despeja en una ecuación y se tiene que reemplazar en la otra):

Queda: $\mathbf{2(-10 - 4y) + 3y = -5}$

Se obtiene una ecuación lineal con una incógnita

d. Se despeja la variable de la ecuación anterior:

$$\mathbf{-20 - 8y + 3y = -5 \rightarrow -8y + 3y = -5 + 20 \rightarrow -5y = 15 \rightarrow}$$

$$\mathbf{-5y = 15 \rightarrow y = \frac{15}{-5} \rightarrow y = -3 \; \textit{Ecuación } 4}$$

e. El resultado anterior se remplaza o sustituye en cualquiera de las ecuaciones anteriores, preferiblemente en la ecuación #3 (ya está despejada la $\boldsymbol{x}$:

- Sustituyendo ecuación $\mathbf{y = -3 \; \textit{Ecuación } 4}$ en la ecuación

  $\mathbf{x = -10 - 4y \; \textit{Ecuación } 3},$, se tiene:

  $\mathbf{x = -10 - 4 * (-3) \rightarrow x = -10 + 12 \rightarrow x = 2}$

f. **Prueba**

- **En la ecuación 1:** $\mathbf{2x + 3y = -5}$

  $\mathbf{2 * (2) + 3 * (-3) = -5 \rightarrow 4 - 9 = -5 \rightarrow}$

$$\mathbf{-5 = -5 \;\; \textit{Verdadero}}$$

- **En la ecuación 2:** $\mathbf{x + 4y = -10}$

$$2 + 4 * (-3) = -10 \rightarrow 2 - 12 = -10 \rightarrow$$

$$-10 = -10\, Verdadero$$

g. Por lo tanto la solución del sistema es: $x = 2, y = -3$ que se puede dar también como la pareja ordenada $(2, -3)$ correspondiendo siempre el primer valor a x, el segundo valor a y.

---

2. Utilizando el método sustitución solucione el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ y + 2x = 11 \end{cases}$$

Procedimiento

a. Para identificar las ecuaciones es conveniente numerarlas:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 10\; Ecuación\ 1 \\ y + 2x = 11\; Ecuación\ 2 \end{cases}$$

b. De cualquiera de las ecuaciones se despeja una de las variables:

- En este caso se despejará y de la ecuación 2:

$y + 2x = 11 \rightarrow y = 11 - 2x$ **Ecuación 3**

- Se reemplaza la ecuación **3** en la ecuación **1:**

$$3x - 5y = 10 \rightarrow 3x - 5 * (11 - 2x) = 10 \rightarrow 3x - 55 + 10x = 10 \rightarrow$$

$$3x + 10x = 10 + 55 \rightarrow 13x = 65 \rightarrow x = \frac{65}{13} \rightarrow x = 5\; Ecuación\ 4$$

- Se reemplaza la ecuación **4** en la ecuación **3:**

$$y = 11 - 2x \rightarrow y = 11 - 2 * (5) \rightarrow y = 11 - 10 \rightarrow y = 1$$

- Se reemplazan estos valores en las ecuaciones 1 y 2 para verificar su validez:

- **En la ecuación 1:**

$$3x - 5y = 10 \rightarrow 3 * (5) - 5 * (1) = 10 \rightarrow 15 - 5 = 10 \rightarrow$$

$$10 = 10\, Verdadero$$

- **En la ecuación 2:**

$$y + 2x = 11 \rightarrow 1 + 2 * (5) = 11 \rightarrow 1 + 10 = 11 \rightarrow$$

$$11 = 11\ Verdadero$$

c. Por lo tanto la solución del sistema es: $x = 5, y = 1$ que se puede dar también como la pareja ordenada $(5, -1)$ correspondiendo siempre el primer valor a x, el segundo valor a y.

---

3. Utilizando el método sustitución solucione el sistema:

3.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 6x + 8y = 4 \end{cases}$$

Procedimiento

a. Para identificar las ecuaciones es conveniente numerarlas:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2\ Ecuación\ 1 \\ 6x + 8y = 4\ Ecuación\ 2 \end{cases}$$

b. De cualquiera de las ecuaciones se despeja una de las variables:

- De la ecuación 1 se despeja la x:

$$3x + 4y = 2 \rightarrow 3x = 2 - 4y \rightarrow x = \frac{2 - 4y}{3}\ Ecuación\ 3$$

- Se reemplaza la ecuación **3** en la ecuación **2:**

$$6x + 8y = 4 \rightarrow 6\left(\frac{2 - 4y}{3}\right) + 8y = 4 \rightarrow 2 * (2 - 4y) + 8y = 4 \rightarrow$$

$$4 - 8y + 8y = 4 \rightarrow 4 = 4$$

Se eliminó la variable y se llegó a una igualdad verdadera $(4 = 4)$, por lo tanto el sistema tiene **infinitas soluciones**.

Nota: Cuando un sistema 2 x 2 tiene **infinitas soluciones**, para dar la solución se acostumbra despejar la primera variable de la última ecuación.

- Para nuestro sistema se tiene:

De la ecuación 2 se despeja x:

$$6x + 8y = 4 \rightarrow 6x = 4 - 8y \rightarrow x = \frac{4 - 8y}{6} \rightarrow x = \frac{2 - 4y}{3}$$

- Como y puede asumir cualquier valor, se dice que la solución es:

$$y = t, x = \frac{2 - 4t}{3}, t \in R_e$$

- Es decir, la solución del sistema es:

$$x = \frac{2 - 4t}{3} \wedge y = t, con\ \ t \in R_e$$

- Para determinar las diferentes soluciones se le debe asignar valores a t.

Por ejemplo:

- Para $t = 0$, la solución es:

$$x = \frac{2-4*(0)}{3} \wedge y = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3} \wedge t = 0$$

- Para $t = 1$, la solución es:

$$x = \frac{2-4*(1)}{3} \wedge y = 1 \rightarrow x = -\frac{2}{3} \wedge t = 1$$

Nota: Si se quieren obtener más soluciones, se le asignan más valores a **t.**

---

4. Método reducción (o método de eliminación).

Para resolver un sistema con el **método eliminación** se combinan las ecuaciones, con sumas o diferencias, de tal manera que se elimina una de las variables.

- **Método de Eliminación**

  Se debe realizar el siguiente procedimiento:

a. **IGUALAR LOS COEFICIENTES**. Se multiplica una o más de las ecuaciones por números adecuados para que el coeficiente de una de las variables en una de las ecuaciones sea el negativo del coeficiente correspondiente de la otra (se igualan coeficientes de alguna de las variables pero con signo contrario).
b. **SUMAR LAS ECUACIONES.** Se suman las dos ecuaciones para eliminar una de las variables y a continuación se despeja la variable que queda.

Nota: Con este método se busca que los coeficientes de una de las variables sean iguales en ambas ecuaciones y luego se restan o se suman término a término ambas ecuaciones.

2.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Utilizando el método reducción, solucione cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $\begin{cases} \mathbf{4x - 3y = 5} \\ \mathbf{2x + \ y = 7} \end{cases}$

Procedimiento

a. Para identificar las ecuaciones es conveniente numerarlas:

$$\begin{cases} \mathbf{4x - 3y = 5}\ \boldsymbol{Ecuación\ 1} \\ \mathbf{2x + y = 7}\ \boldsymbol{Ecuación\ 2} \end{cases}$$

- Inicialmente se eliminará la $\boldsymbol{x}$**:** Para igualar los coeficiente y que queden con signos contrarios, la **ecuación 1** se multiplica por **2** y **la ecuación 2** se multiplica por -4:

$$\boldsymbol{Ecuación\ 1 * (2) \to 8x - 6y = 10}$$

$$\boldsymbol{Ecuación\ 2 * (-4) \to -8x - 4y = -28}$$

- Se suman las ecuaciones obtenidas al multiplicar:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{8x} & \mathbf{-6y} & \mathbf{=\ 10} \\ \mathbf{-8x} & \mathbf{-4y} & \mathbf{=-28} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{-10y} & \mathbf{=-18} \end{array}$$

- Queda entonces que:

$$\boldsymbol{-10y = -18 \to y = \frac{-18}{-10} \to y = \frac{9}{5}}$$

- Se realiza el mismo proceso para eliminar **y**, esto es, se multiplica la ecuación **1** por **1** y la ecuación 2 por 3:

$$\boldsymbol{Ecuación\ 1 * (1) \to 4x - 3y = 5}$$
$$\boldsymbol{Ecuación\ 2 * (3) \to 6x + \ 3y = 21}$$

$$\begin{array}{lll} 4x & -3y & = 5 \\ 6x & +3y & = 21 \end{array}$$

___

$$\begin{array}{lll} 10x & 0 & = 26 \end{array}$$

- Queda entonces que:

$$10x = 26 \rightarrow x = \frac{26}{10} \rightarrow x = \frac{13}{5}$$

Ahora sumamos ambas ecuaciones término a término:

b. **PRUEBA**:

En la ecuación **1**:

$$4x - 3y = 5 \rightarrow 4 * \left(\frac{13}{5}\right) - 3 * \left(\frac{9}{5}\right) = 5 \rightarrow \frac{52}{5} - \frac{27}{5} = 5 \rightarrow$$

$$\frac{52-27}{5} = 5 \rightarrow \frac{25}{5} = 5 \rightarrow 5 = 5\ Verdadero$$

- En la ecuación 2:

$$2x + y = 7 \rightarrow 2 * \left(\frac{13}{5}\right) + \left(\frac{9}{5}\right) = 7 \rightarrow \frac{26}{5} + \frac{9}{5} = 7 \rightarrow$$

$$\frac{26+9}{5} = 7 \rightarrow \frac{35}{5} = 7 \rightarrow 7 = 7\ Verdadero$$

c. Por lo tanto la solución del sistema es: $x = \frac{13}{5}, y = \frac{9}{5}$ que se puede dar también como la pareja ordenada $\left(\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right)$ correspondiendo siempre el primer valor a x, el segundo valor a y.

___

2. $$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = 4 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

a. Para identificar las ecuaciones es conveniente numerarlas:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = 4\ Ecuación\ 1 \\ x + y = -1\ Ecuación\ 2 \end{cases}$$

- Inicialmente se eliminará la $\boldsymbol{x}$: Para igualar los coeficiente y que queden con signos contrarios, la **ecuación 1** se multiplica por **1** y **la ecuación 2** se multiplica por $-\frac{3}{2}$**:**

$$\boldsymbol{Ecuación\ 1*(1)\to \frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y=4}$$

$$\boldsymbol{Ecuación\ 2*\left(-\frac{3}{2}\right)\to -\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}}$$

- Sumando término a término:

$$\begin{array}{lll} \frac{3}{2}x & -\frac{1}{3}y & =4 \\ -\frac{3}{2}x & -\frac{3}{2}y & =\frac{3}{2} \\ \hline 0 & -\frac{1}{3}y-\frac{3}{2}y=\frac{-2y-9y}{6}=-\frac{11}{6}y & =4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2} \end{array}$$

- Queda para resolver la ecuación:

$$=-\frac{11}{6}y=\frac{11}{2}\to y=\frac{(11)*(6)}{(2)*(-11)}\to y=\frac{66}{-22}\to y=-3$$

- Se aplica el mismo proceso para eliminar la otra variable:

Para igualar los coeficientes y que queden con signos contrarios, la **ecuación 1** se multiplica por **1** y **la ecuación 2** se multiplica por $\frac{1}{3}$**:**

$$\boldsymbol{Ecuación\ 1*(1)\to \frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y=4}$$

$\boldsymbol{Ecuación\ 2*\left(\frac{1}{3}\right)\to \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3}}$ Sumando término a término:

$$\begin{array}{lll} \frac{3}{2}x & -\frac{1}{3}y & =4 \\ \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}y & =-\frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

$\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{9x+2x}{6} = \frac{11}{6}x$ $\quad 0 \quad$ $= 4 - \frac{1}{3} = \frac{12-1}{3} = \frac{11}{3}$

- Queda para resolver la ecuación:

$$\frac{11}{6}x = \frac{11}{3} \to x = \frac{6*11}{11*3} \to x = \frac{6}{3} \to x = 2$$

- **PRUEBA:**
  - En la ecuación 1: $\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = 4$

$$\frac{3}{2}*(2) - \frac{1}{3}(-3) = 4 \to 3 + 1 = 4 \to$$

$$4 = 4\ Verdadero$$

  - En la ecuación 2:
    $x + y = -1 \to 2 + (-3) = -1 \to 2 - 3 = -1 \to$
    $-1 = -1\ Verdadero$

b. Por lo tanto la solución del sistema es: $x = 2, y = -3$ que se puede dar también como la pareja ordenada $(2, -3)$ correspondiendo siempre el primer valor a x, el segundo valor a y.

---

3. $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$

a. Para identificar las ecuaciones es conveniente numerarlas:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1\ Ecuación\ 1 \\ x + y = 7\ Ecuación\ 2 \end{cases}$$

$Ecuación 1 * (1) \to 2x + 2y = 1 \to 2x + 2y = 1$

$Ecuación\ 2 * (-2) \to x + y = 7 \to -2x - 2y = -14$

- Sumando término a término:

$2x$	$2y$	$= 1$
$-2x$	$-2y$	$= -14$
0	0	$= -133$

- Resulta la siguiente ecuación:

$$\mathbf{0 = -13}\ \boldsymbol{Falso}$$

- Se eliminaron ambas variables y se llegó a una **igualdad falsa**. Por lo tanto el sistema **no tiene solución**.

5. Método Determinantes

Un determinante 2 x 2 es una expresión de la forma:

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

En la columna 1 tenemos las entradas $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$

En la columna 2 tenemos las entradas $\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$

El determinante es un número que se obtienen como:

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{ad - bc}$$

Nota: Más adelante se profundizará sobre los determinantes.

2.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Calcule los siguientes determinantes:

1. $D = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-4) * (6) - (-2) * (5) = -24 + 10 = -14$

---

2. $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \mathbf{(8) * (7) - (-4) * (-1) = 56 - 4 = 52}$

- **SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MÉTODO DETERMINANTES:**

Dado un sistema 2 X 2 de la forma:

$\boldsymbol{ax + by = E}$

$\boldsymbol{cx + dy = F}$

Se debe cumplir que:

- Las variables estén en el mismo orden en las dos ecuaciones.
- El término independiente este en el lado derecho de la ecuación.
- Se deben reducir términos semejantes.

Para este sistema se pueden escribir 3 determinantes así:

1. El determinante formado por los **coeficientes de las variables** con sus respectivos signos:

$$\boldsymbol{D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

2. El determinante formado al reemplazar la **entrada de la primera columna** por **la entrada del término independiente, esto es:**

$$\boldsymbol{D_1 = \begin{vmatrix} E & b \\ F & d \end{vmatrix}}$$

3. El determinante formado al reemplazar la **entrada de la segunda columna** por **la entrada del término independiente, esto es:**

$$\boldsymbol{D_2 = \begin{vmatrix} a & E \\ c & F \end{vmatrix}}$$

La solución del sistema por determinantes está dado por:

$$\boldsymbol{x = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{D_2}{D}}$$

2.2.6 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Utilizando determinantes, solucionar los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ 2x + 7y = 4 \end{cases}$

Procedimiento

- $x = \frac{D_1}{D} \to x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(6)*(7)-(-3)*(4)}{(5)*(7)-(-3)*(2)} = \frac{42+12}{35+6} = \frac{54}{41}$
- $y = \frac{D_2}{D} \to y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(5)*(4)-(6)*(2)}{(5)*(7)-(-3)*(2)} = \frac{20-12}{35+6} = \frac{8}{41}$

➢ **PRUEBA:**

- En la ecuación 1:

$$5x-3y=6\rightarrow 5*\left(\frac{54}{41}\right)-3*\left(\frac{8}{41}\right)=6\rightarrow\frac{270}{41}-\frac{24}{41}=6\rightarrow$$

$$\frac{270-24}{41}=6\rightarrow\frac{246}{41}=6\rightarrow 6=6\ verdadero$$

- En la ecuación 2:

$$2x+7y=4\rightarrow 2*\left(\frac{54}{41}\right)+7\left(\frac{54}{41}\right)=\frac{108}{41}+\frac{56}{41}=4\rightarrow$$

$$\frac{108+56}{41}=4\rightarrow\frac{164}{41}=4\rightarrow 4=4\ Verdadero$$

- Por lo tanto la solución del sistema es:

$$x=\frac{54}{41}\ ,y=\frac{8}{41}$$

---

2. $\begin{cases}3x-2y=20\\ 5x+2y=8\end{cases}$

Procedimiento

- $x=\frac{D_1}{D}\rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}20 & -2\\ 8 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix}}=\frac{(20)*(2)-(-2)*(8)}{(3)*(2)-(-2)*(5)}=$

$$\frac{40+16}{6+10}=\frac{56}{16}=\frac{7}{2}$$

- $y=\frac{D_2}{D}\rightarrow y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 20\\ 5 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix}}=\frac{(3)*(8)-(20)*(5)}{(3)*(2)-(-2)*(5)}=$

$$\frac{24-100}{6+10}=\frac{-76}{16}=-\frac{19}{4}$$

- **PRUEBA:**

- En la ecuación 1:

$$3x-2y=20\rightarrow 3*\left(\frac{7}{2}\right)-2*\left(-\frac{19}{4}\right)=20\rightarrow\frac{21}{2}+\frac{19}{2}=20\rightarrow$$

$$\frac{21+19}{2}=20 \rightarrow \frac{40}{2}=20 \rightarrow 20=20\, Verdadero$$

- En la ecuación 2:

$$5x+2y=8 \rightarrow 5*\left(\frac{7}{2}\right)+2*\left(-\frac{19}{4}\right)=8 \rightarrow \frac{35}{2}-\frac{19}{2}=8 \rightarrow \frac{35-19}{2}=8 \rightarrow \frac{16}{2}=8 \rightarrow 8=8\, verdadero$$

- Por lo tanto la solución del sistema es:

$$x=\frac{7}{2}\,, y=-\frac{19}{4}$$

APLICACIONES: Para la solución de problemas, se sugiere el siguiente procedimiento:

2.2.7 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN

a. **ASIGNAR LETRAS A LAS VARIABLES**: Se asignan letras para representar las cantidades variables del problema. Por lo general, la última oración del problema indica lo que se pregunta, de modo que eso es lo que debe representar las letras asignadas.
b. **ORGANIZAR LA INFORMACIÓN SUMINISTRADA:** Si es posible, trazar un diagrama, o formar una tabla que ayude a visualizar la relación entre las cantidades que intervienen en el problema.
c. **TRADUCIR LA INFORMACIÓN SUMINISTRADA EN ECUACIONES**: Traducir la información sobre las variables que aparecen en el problema. Recuerde que una ecuación sólo es una afirmación escrita, usando los símbolos de las matemáticas.
d. **RESOLVER LAS ECUACIONES E INTERPRETAR LOS RESULTADOS**: Resolver las ecuaciones formuladas en el paso 3 y expresar con palabras lo que significan las soluciones, en términos de los significados originales de las variables.

2.2.8 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Una mujer planea invertir un total de US$ 2.500. Parte de él lo pondrá en un certificado de ahorros que paga una tasa de interés del 9.5% anual y el resto lo pondrá en un fondo de inversiones que paga una tasa de interés del 13% anual. ¿Cuánto debe invertir en cada uno para obtener una ganancia del 11.6% sobre su dinero después de un año?

Procedimiento

a. CANTIDADES Y MODO DE INVERSIÓN	
CANTIDAD INVERTIDA	**MODO DE INVERSIÓN**
x	**Certificado de ahorros**
y	**Fondo de inversiones**
$x + y = 2500\ Ecuación\ 1$	

b. RENDIMIENTOS ANUALES		
MODO DE INVERSIÓN	**RENDIMIENTO OBTENIDO**	**REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA**
Certificado de ahorros	$9.5\%\ de\ x$	$\frac{9.5}{100}x$
Fondo de inversiones	$13\%\ de\ y$	$\frac{13}{100}y$

c. GANANCIA TOTAL			
PORCENTAJE	**MONTO**	**CÁLCULOS**	**TOTAL**
11.6%	**2500**	$\frac{11.6}{100} * 2500$	**290**
$\frac{9.5}{100}x + \frac{13}{100}y = 290\ Ecuación\ 2$			

d. Se debe solucionar el sistema y para realizarlo se utilizará el método de determinante:

$$x + y = 2500 \ Ecuación\ 1$$

$$\frac{9.5}{100}x + \frac{13}{100}y = 290 \ Ecuación\ 2$$

- Utilizando el método de determinantes se tiene:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9.5}{100} & \frac{13}{100} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2500 & 1 \\ 290 & \frac{13}{100} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2500 \\ \frac{9.5}{100} & 290 \end{vmatrix}$$

- $x = \frac{D_1}{D} \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 2500 & 1 \\ 290 & \frac{13}{100} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9.5}{100} & \frac{13}{100} \end{vmatrix}} = \frac{(2500)*\left(\frac{13}{100}\right)-(1)*(290)}{(1)*\left(\frac{13}{100}\right)-(1)*\left(\frac{9.5}{100}\right)} = \frac{325-290}{0.13-0.095} \rightarrow$

$$x = \frac{35}{0.035} \rightarrow x = 1000$$

- $y = \frac{D_2}{D} \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2500 \\ \frac{9.5}{100} & 290 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9.5}{100} & \frac{13}{100} \end{vmatrix}} = \frac{(1)*(290)-(2500)*\left(\frac{9.5}{100}\right)}{(1)*\left(\frac{13}{100}\right)-(1)*\left(\frac{9.5}{100}\right)} = \frac{290-237.5}{0.13-0.095} \rightarrow$

$$y = \frac{52.5}{0.035} \rightarrow y = 1500$$

e. Se invierten **US $1.000** en el certificado de ahorro y **US$ 1.500** en el fondo de inversiones.

---

2. "Un hacendado compró 4 vacas y 7 caballos por 514 dólares y más tarde, a los mismos precios, compró 8 vacas y 9 caballos por 818 dólares. Halle el costo de una vaca y el costo de un caballo."

Procedimiento

a. Costo unitario

ANIMALES COMPRADOS	COSTO UNITARIO (en dólares)
$\boldsymbol{vacas}$	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{caballos}$	$\boldsymbol{y}$

b. Compras totales

COMPRA	RELACIÓN MATEMÁTICA
4 vacas y 7 caballos por 514 dólares	$\boldsymbol{4x+7y=514}$ **Ecuación 1**
8 vacas y 9 caballos por 818 dólares	$\boldsymbol{8x+9y=818}$ **Ecuación 2**

c. Las ecuaciones plantadas para la situación problémica son:

$\boldsymbol{4x+7y=514}$ **Ecuación 1**

$\boldsymbol{8x+9y=818}$ **Ecuación 2**

- Utilizando el método de determinantes se tiene:

$$D=\begin{vmatrix}4 & 7\\ 8 & 9\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}514 & 7\\ 818 & 9\end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4 & 514\\ 8 & 818\end{vmatrix}$$

- $x=\frac{D_1}{D}\rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}514 & 7\\ 818 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 7\\ 8 & 9\end{vmatrix}}=\frac{(514)*(9)-(7)*(818)}{(4)*(9)-(7)*(8)}=\frac{4626-5726}{36-56}\rightarrow$

$$x=\frac{-1100}{-20}\rightarrow x=55$$

- $y=\frac{D_2}{D}\rightarrow y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 514\\ 8 & 818\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 7\\ 8 & 9\end{vmatrix}}=\frac{(4)*(818)-(514)*(8)}{(4)*(9)-(7)*(8)}=\frac{3272-4112}{36-56}\rightarrow$

$$y = \frac{-840}{-20} \rightarrow y = 42$$

d. **Una vaca** cuesta **55 dólares**, **un caballo** cuesta **42 dólares**.

---

3. Una persona tiene 4100 $ en 13 monedas de 500 $ y de 200 $. Determine cuantas monedas de 500 $ y cuantas monedas de 200$ tiene la persona.

Procedimiento

a. Costo unitario

CANTIDAD DE MONEDAS	NOMINACIÓN
x	$\$ 200$
y	$\$ 500$
$x + y = 13\ Ecuación\ 1$	$200x + 500y = 4100\ Ecuación\ 2$

b. Se tiene que:

$$x + y = 13\ Ecuación\ 1$$

$$200x + 500y = 4100\ Ecuación\ 2$$

- Utilizando el método de determinantes se tiene:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 500 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 4100 & 500 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 200 & 4100 \end{vmatrix}$$

- $x = \frac{D_1}{D} \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 4100 & 500 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 500 \end{vmatrix}} = \frac{(13)*(500)-(1)*(4100)}{(1)*(500)-(1)*(200)} = \frac{6500-4100}{500-200} \rightarrow$

$$x = \frac{2400}{300} \rightarrow x = 8$$

- $y = \frac{D_2}{D} \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 200 & 4100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 200 & 500 \end{vmatrix}} = \frac{(1)*(4100)-(13)*(200)}{(1)*(500)-(1)*(200)} = \frac{4100-2600}{36-56} \rightarrow$

$$y = \frac{1500}{300} \rightarrow y = 5$$

c. La persona tiene **8 monedas de 200** pesos y **5 monedas de 500 pesos**.

---

4. "La diferencia de dos números es 40 y $\frac{1}{8}$ de su suma es 11. Halle los dos números."

Procedimiento

a. Sean:

x: *número desconocido*

y: *número desconocido*

b. De acuerdo a las condiciones dadas, se tiene que:

$$x - y = 40 \; Ecuación\ 1$$

$$\frac{1}{8}(x + y) = 11 \; Ecuación\ 2$$

Nota: La ecuación 2 se pude expresar de la siguiente forma:

$$\frac{1}{8}(x + y) = 11 \rightarrow x + y = 88$$

- Por lo tanto se debe solucionar el sistema:

$$x - y = 40 \; Ecuación\ 1$$

$$x + y = 88 \; Ecuación\ 2$$

c. Se tiene que:

$$x - y = 40 \; Ecuación\ 1$$

$$x + y = 88 \; Ecuación\ 2$$

- Utilizando el método de determinantes se tiene:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 40 & -1 \\ 88 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 88 \end{vmatrix}$$

- $x = \frac{D_1}{D} \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -1 \\ 88 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(40)*(1)-(-1)*(88)}{(1)*(1)-(-1)*(1)} = \frac{40+88}{1+1} \rightarrow$

$$x = \frac{128}{2} \rightarrow x = 64$$

- $y = \frac{D_2}{D} \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 88 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1)*(88)-(40)*(1)}{(1)*(1)-(-1)*(1)} = \frac{88-40}{1+1} \rightarrow$

$$y = \frac{48}{2} \rightarrow y = 24$$

d. Los números son $x = 64$ **y** $y = 24$.

2.2.9 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Dado el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y = -10 \\ 7x + 6y = 62 \end{cases}$ indique si el punto $(2,8)$ es o no es solución del sistema. Justifique su respuesta.

2. Solucione los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando dos métodos diferentes.

a. $\begin{cases} 6x - 9y = 15 \\ -4x + 3y = 21 \end{cases}$

b. $\begin{matrix} \frac{7}{5}x + \frac{3}{4}y = \frac{5}{6} \\ 12x - \frac{3}{7}y = \frac{1}{2} \end{matrix}$

c. $\begin{cases} x - 11y = 18 \\ 6x + 12y = 21 \end{cases}$

3. Para solucionar las siguientes situaciones problémicas, plantee sistemas de ecuaciones 2X2 y resuélvalas utilizando el método que desee.

a. En 30 billetes de 10 mil pesos y de 5 mil pesos se tienen 210 mil pesos. Diga cuantos billetes de 10 mil pesos y cuantos billetes de 5 mil pesos hay.

b. En un cine hay 700 personas entre adultos y niños. Cada adulto pagó 7 mil pesos y cada niño pagó 5 mil pesos por su entrada. La recaudación es de $ 4’100 000. ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el cine?

4. Solucione los siguientes sistemas 2 X 2 y las situaciones problémicas planteadas, utilizando el método que desee.

$$-3x+11y=20 \wedge -14x+5y=42$$

$$\begin{cases} \frac{12}{5}x+41=\frac{3}{2} \\ -8x+\frac{4}{7}y=10 \end{cases}$$

5. Solucione los siguientes problemas de aplicación, justificando cada uno de los procesos realizados:

a. Una persona tiene $ 7’000.000 para invertir. Una parte la invierte a una tasa de interés del 4.5% anual, el cuádruple de la parte anterior la invierte a una tasa de interés del 6% anual y el resto lo invierte a una tasa de interés del 5% anual. Si el interés total ganado en un año es de $ 435.000, Determine el interés ganado en cada una de las inversiones.

b. Una fábrica dispone de dos máquinas para producir dos artículos A y B. Para producir una unidad del artículo A se requiere utilizar la máquina I cinco horas y la máquina II seis horas 30 minutos. Para producir una unidad del artículo B se necesita tres horas y media y dos horas en cada máquina respectivamente. Si la máquina I se encuentra disponible al mes 715 horas y la máquina II 700 horas. Determine cuantas unidades de cada artículo se pueden producir mensualmente.

6. Resuelva los siguientes sistemas 2X2 y las situaciones problémicas utilizando cualquiera de los métodos desarrollados anteriormente:

a. $13x-14y=0 \wedge 2x-y=15$

b. $\begin{cases} x-2y=\frac{4}{5} \\ \frac{7}{6}x+\frac{5}{9}y=-4 \end{cases}$

c. $\frac{2}{9}x+\frac{5}{6}y=\frac{7}{4} \wedge \frac{15}{2}x-\frac{7}{18}y=\frac{5}{4}$

d. $\begin{cases} \frac{4}{7}x-8y=\frac{4}{3} \\ \frac{7}{12}x+\frac{5}{18}y=-11 \end{cases}$

e. $\frac{2}{5}x+\frac{5}{4}y=\frac{7}{10} \wedge \frac{5}{4}x-\frac{17}{18}y=\frac{5}{9}$

a. Una persona invirtió $ 3’800.000: Parte a una tasa de interés del 6% anual y el resto a una tasa de interés del 7% anual. El interés ganado al final de un año, fue equivalente a una tasa del 6.5% de la inversión inicial. ¿Cuánto fue invertido a cada tasa?

b. 6 Libras de café y 5 libras de azúcar costaron $ 8100 y 5 libras de café y 4 libras de azúcar costaron $ 6650. Halle el precio de una libra de café y el precio de una libra de azúcar.

c. Una persona tiene:
    a. $ 3400 en monedas de $ 50 y $100. Si tiene en total 47 monedas. ¿Cuántas monedas tienen de cada denominación?
    b. $ 99000 en billetes de $ 1000, $ 5000 y $ 10000; si tiene 26 billetes, y la cantidad de billetes de $ 1000 es el doble de la de $ 5000. ¿Cuántos billetes tiene de cada denominación?

d. Un hacendado compró 5 vacas y 7 caballos por $ 44.5 millones, luego a los mismos precios compró 8 vacas y 3 caballos por $ 26.1 millones. Halle el costo de cada vaca y de cada caballo.

e. El doble de un número menor más el triple de otro número mayor es 44. El doble del número mayor menos el triple del número menor es igual a -1. ¿Cuáles son los números?

f. “La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ de su diferencia es 2. Halle los números. R: 104 y 86.”

g. En un cine 15 entradas de adulto y 20 entradas de niño cuestan $ 220 000. 12 entradas de adulto y 25 entradas de niño cuestan $ 221000. Determine el valor de la entrada para niño y el valor de la entrada para adulto.

h. “Las edades de A y de B están en la relación 5 a 7. Dentro de 2 años la relación entre la edad de A y la edad de B será de 8 a 11. Halle las edades actuales. R: 30 y 42 años.”

i. “La edad actual de A guarda con la edad actual de B la relación 2 a 3. Si la edad que tenía A hace 4 años se divide por la edad que tendrá B dentro de 4 años, el resultado es $\frac{2}{5}$. Halle las edades actuales de A y de B.”

j. “Cuando empiezan a jugar A y B la relación de lo que tiene A y lo que tiene B es 10 a 13. Después que A le ha ganado 10 mil pesos a B la relación entre lo que tiene A y lo que le queda a B es 12 a 11. ¿Con cuánto dinero empezó a jugar cada uno? R: 50 mil pesos y 65 mil pesos.”

k. “Si A le da a B 1 millón de ambos quedan con lo mismo. Si B le da a A 1 millón de pesos, A quedará con el triple de lo que le queda a B. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?”

l. Si B le da a A 2 dólares ambos quedan con lo mismo y si A le da a B 2 dólares; B queda con el doble de lo que le queda a A. ¿Cuánto tienen cada uno?

m. “Si Pedro le da a Juan 3 millones de pasos, ambos quedan con igual cantidad de dinero. Si Juan le da a Pedro 3 millones de pasos, este tiene 4 veces lo que le queda a Juan. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?”

n. Si A le da a B 50 mil pesos, ambos quedan con el mismo dinero. Si B le da a A 50 mil pesos, A queda con 5 veces el dinero de B, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

o. “Hace 10 años la edad de A era el doble que la edad de B; dentro de 10 años la edad de B será los $\frac{3}{4}$ de la edad de A. Halle las edades actuales.”

p. “Hace 6 años la edad de A era el doble que la edad de B; dentro de 6 años será los $\frac{8}{5}$ de la edad de B. Halle las edades actuales. R: 42 y 24 años.”

q. “La edad actual de un hombre es los $\frac{9}{5}$ de la edad actual de su esposa. Dentro de 4 años la edad de su esposa será los $\frac{3}{5}$ de la edad de su esposo. Halle las edades actuales. R: 36 y 20 años.”

r. “Un padre le dice a su hijo: Hace 6 años tu edad era $\frac{1}{5}$ de la mía; dentro de 9 años será los $\frac{2}{5}$. Halle ambas edades.”

s. “Pedro le dice a Juan: Si me das 15, tendré 5 veces lo que tú. Juan le dice a Pedro: Si me das 20, tendré 3 veces lo que tú. ¿Cuánto tiene cada uno?”

t. Un grupo de 65 personas, entre adultos y niños entraron a cine. Si la entrada para adultos cuesta a \$7.500 y tiene un costo de \$2.000 más que la entrada para niños y en total se obtuvo un ingreso por entradas de \$ 407.500. Determine: ¿Cuál fue el ingreso obtenido por la entrada de los niños?

3 UNIDAD 2 MATRICES

3.1.1 OBJETIVO GENERAL:

Interpretar el concepto de matriz, entradas de una matriz, orden de una matriz, matriz cuadrada, entre otros y algunos tipos de matrices especiales, identificando, también, las características que deben cumplirse para que dos matrices sean iguales, así como la explicación de las diferentes operaciones que pueden efectuarse con matrices.

3.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar las operaciones básicas con matrices.
- Identificar algunos tipos de matrices y sus propiedades.

3.2 CONCEPTOS Y DEFINICIONES.

ALGO DE HISTORIA.

CONEXIÓN CON LA HISTORIA

Cronología	
Año	**Acontecimiento**
200 a.C.	En China los matemáticos usan series de números.
1848 d.C.	J. J. Sylvester introduce el término "**matriz**".
1858	Cayley publica *Memorias sobre la teoría de matrices*.
1878	Frobenius demuestra resultados fundamentales en álgebra matricial.
1925	Werner Heisenberg utiliza la teoría matricial en la mecánica cuántica

El origen de las matrices es muy antiguo. Los cuadrados latinos y los cuadrados mágicos se estudiaron desde hace mucho tiempo. Un cuadrado mágico, 3 por 3, se registra en la literatura china hacia el 650 a. C.[2]

Es larga la historia del uso de las matrices para resolver ecuaciones lineales. Un importante texto matemático chino que proviene del año 300 a. C. a 200 a. C., *Nueve capítulos sobre el Arte de las matemáticas* (*Jiu Zhang Suan Shu*), es el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas.[3] En el capítulo séptimo, "*Ni mucho ni poco*", el concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de su publicación por el matemático japonés Seki Kōwa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693.

Los "cuadrados mágicos" eran conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los matemáticos y astrónomos de la India, junto con otros aspectos de las matemáticas combinatorias. Todo esto sugiere que la idea provino de China. Los primeros "cuadrados mágicos" de orden 5 y 6 aparecieron en Bagdad en el 983, en la *Enciclopedia de la Hermandad de Pureza* (*Rasa'il Ihkwan al-Safa*).[2]

Después del desarrollo de la teoría de determinantes por Seki Kowa y Leibniz para facilitar la resolución de ecuaciones lineales, a finales del siglo XVII, Cramer presentó en 1750 la ahora denominada regla de Cramer. Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan desarrollaron la eliminación de Gauss-Jordan en el siglo XIX.

Fue James Joseph Sylvester quien utilizó por primera vez el término « matriz » en 1848/1850.

En 1853, Hamilton hizo algunos aportes a la teoría de matrices. Cayley introdujo en 1858 la **notación matricial**, como forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas.

Cayley, Hamilton, Hermann Grassmann, Frobenius, Olga Taussky-Todd y John von Neumann cuentan entre los matemáticos famosos que trabajaron sobre la teoría de las matrices. En 1925,Werner Heisenberg redescubre el cálculo matricial fundando una primera formulación de lo que iba a pasar a ser la mecánica cuántica. Se le considera a este respecto como uno de los padres de la mecánica cuántica.

Olga Taussky-Todd (1906-1995), durante la II Guerra Mundial, usó la teoría de matrices para investigar el fenómeno de aeroelasticidad llamado *fluttering*.

*Tomado de es.wikipedia.org/wiki/**Matriz_**(matemáticas) 30 de Septiembre de 2013*

“Los orígenes de cada una de las áreas que componen el álgebra lineal se diluyen a través de la historia de la humanidad. En textos chinos y babilonios de más de 2000 años de antigüedad se han encontrado sistemas de ecuaciones lineales enunciados a partir de problemas reales, pero con el indudable propósito de educar al estudiante en los procedimientos matemáticos. El término **matriz** se mencionó por primera vez en un artículo escrito por el matemático inglés James Sylvester en 1850, pero el concepto de **producto de matrices** fue desarrollado por “El Príncipe de la matemática” Karl Friederich Gauss (1777 – 1855), quién lo presento en su obra Disquisitiones Arithmeticae a partir de la composición de transformaciones lineales. Por su parte, el también matemático inglés Arthur Cayley introdujo en un artículo publicado en 1855 la noción de **Inversa de una matriz**. Al igual que Sylvester, Calyley se hizo abogado y durante los primeros años de ejercicio profesional conoció a Sylvester, con quien entabló una am amistad que permaneció durante 40 años y fue muy fructífera para el desarrollo del álgebra lineal”.

- **Definición de Matriz:**

Una **matriz** es un arreglo en dos dimensiones (rectangular) de elementos, llamados entradas de una matriz.

Las matrices se usan generalmente para describir:

- Sistemas de ecuaciones lineales,
- Sistemas de ecuaciones diferenciales, o
- Representar una aplicación lineal (dada una base).

Notas:

- Las matrices se describen en el campo de la teoría de matrices.
- Las matrices se utilizan para múltiples aplicaciones y sirven, en particular, para representar los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales o para representar las aplicaciones lineales; en este último caso las matrices desempeñan el mismo papel que los datos de un vector para las aplicaciones lineales.
- Pueden sumarse, multiplicarse y descomponerse de varias formas, lo que también las hace un concepto clave en el campo del álgebra lineal.

- **Representación de una matriz:**

- Para la representación simbólica de matrices se utilizan letras mayúsculas como **A**, **B**, **C**, entre otras.
- Los elementos dentro de la matriz se encierran entre paréntesis o entre corchetes, nunca entre llaves.
- Cada elemento se distribuye en **FILAS** (o renglones) y en **COLUMNAS.**

LAS FILAS: Son los arreglos **horizontales** y se enumeran de **arriba** hacia **abajo.**

LAS COLUMNAS: Son los arreglos **verticales** y se enumeran de **izquierda** a **derecha**.

Cada elemento dentro de la matriz tiene una posición definida y se identifica por la fila y la columna a la cual pertenece, por lo tanto, para nombrar un elemento cualquiera, se utiliza la notación de doble subíndice: $\boldsymbol{a_{i\,j}}$ dónde: $i\ es\ la\ fila,\ \ y\ \ j\ es\ la\ columna$

Por lo tanto cada elemento de una matriz se identifica por su fila y su columna. Por ejemplo el elemento $\boldsymbol{a_{24}}$ se ubica en la fila 2 y en la columna 4.

(Siempre el **primer subíndice** corresponde a la **fila** y el **segundo subíndice** corresponde a la **columna**).

3.2.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Para la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-9} & \mathbf{8} & \mathbf{-9} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{2} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-9} & \mathbf{8} & \mathbf{-9} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Identifique el elemento correspondiente a las siguientes posiciones (entradas): Complete la tabla

ENTRADA	FILA	COLUMNA	ELEMENTO
A_{34}			
A_{54}			
A_{42}	Fila 4	Columna 2	-9
A_{53}			
A_{65}			
A_{71}	Fila 7	Columna1	0
A_{44}			

2. Para la matriz:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-9} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{12} \end{bmatrix}$$

Identifique el elemento correspondiente a las siguientes posiciones (entradas): Complete la tabla

ENTRADA	FILA	COLUMNA	ELEMENTO
B_{31}	Fila 3	Columna 1	1
B_{34}			
B_{22}			
B_{53}	Fila 5	Columna 3	12
B_{15}			
B_{23}			

- **Orden de una matriz:**

Se dice que el orden de una matriz (es decir el número de elementos que tiene) se obtiene al indicar en forma de multiplicación el número de **FILAS** por el número de **COLUMNAS**, esto es: Una matriz $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{m}$ filas y $\boldsymbol{n}$ columnas se denota por $\boldsymbol{A_{m\times n}}$ y se dice que su orden es $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$.

Nota: 1. Una matriz A de orden $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ también se puede simbolizar como: $\boldsymbol{A_{i\,j}}$.

2. **El primer valor** corresponde al número de **FILAS** y **el segundo valor** al **NÚMERO DE COLUMNAS**;

de esta manera se puede indicar exactamente la posición de la entrada o elemento.

En forma general una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ se escribe como:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Generalizando, se dice que el símbolo $\boldsymbol{a_{i\,j}}$ denota la entrada en la $\underline{\boldsymbol{fila\ i}}$ y en la $\underline{\boldsymbol{columna\ j}}$.

3.2.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Construya una matriz A 3 X 5 donde el resto **son ceros:**

ENTRADA	VALOR
a_{11}	1
a_{14}	-8
a_{22}	6
a_{25}	4
a_{33}	-7
a_{34}	2
Demás entradas	0

Procedimiento

a. Se construye una matriz genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

b. Se reemplazan los valores dados en la matriz genérica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

---

2. Construya una matriz columna de tres entradas, tal que:

ENTRADA	VALOR
a_{21}	14
a_{11}	-9
a_{31}	16

Procedimiento

a. Se construye una matriz genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

b. Se reemplazan los valores dados en la matriz genérica:

$$A = \begin{bmatrix} -9 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

---

3. Si $A = [a_{i\,j}]$ y tiene un orden 3×4 con la condición de que $a_{i\,j} = i + j$

$\forall\, i\, j,$ escribir la matriz.

Procedimiento

a. Se construye una matriz genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

b. Aplicando la fórmula: $a_{i\,j} = i + j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = 1+1 & a_{12} = 1+2 & a_{13} = 1+3 & a_{14} = 1+4 \\ a_{21} = 2+1 & a_{22} = 2+2 & a_{23} = 2+3 & a_{24} = 2+4 \\ a_{31} = 3+1 & a_{32} = 3+2 & a_{33} = 3+3 & a_{34} = 3+4 \end{bmatrix}$$

c. La matriz queda:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

---

4. Construya la matriz B de orden 3×3, que cumpla las siguientes condiciones:

ENTRADA	CONDICIÓN
$1.\, a_{i\,j} = 1$	$i = j$**(Igual subíndice)**
$2.\, a_{ij} = 0$	$i \neq j$ **(Diferente subíndice)**

$a_{ij} = 1,\ para\ i = j \wedge a_{ij} = 0,\ para\ i \neq j$

Procedimiento

a. Se construye una matriz genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

b. Para la primera condición:
$i = j$, **(Igual subíndice)** se tiene:

$a_{11} = 1$

$a_{22} = 1$

$\boldsymbol{a_{33} = 1}$

c. Para la segunda condición:
$i \neq j$ (Diferente subíndice)

$\boldsymbol{a_{12} = 0}$

$\boldsymbol{a_{13} = 0}$

$\boldsymbol{a_{21} = 0}$

$\boldsymbol{a_{23} = 0}$

$\boldsymbol{a_{31} = 0}$

$\boldsymbol{a_{32} = 0}$

d. La matriz queda:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

- **CLASIFICACIÓN DE LAS MATRICES**
  - **Matriz cuadrada:**

Es una matriz donde el **número de Filas** es **igua**l al **número de columnas**, se denota como A_n.

Nota: Siempre se debe especificar que es una matriz cuadrada.

3.2.3 EJERCICIOS DE AUTOAPRENDIZAJE

1. Sea la matriz:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -10 & 11 \\ 7 & -8 & 2 \end{bmatrix}}$$

Es una matriz que tiene **3 filas** y **3 columnas**, por lo tanto se define como una **matriz cuadrada de orden 3.**

---

2. Sea la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Es una matriz que tiene **4 filas** y **4 columnas**, por lo tanto se define como una **matriz cuadrada de orden 4.**

---

3. Sea la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Es una matriz que tiene **2 filas** y2 **columnas**, por lo tanto se define como una **matriz cuadrada de orden 2.**

- **MATRIZ NULA O MATRIZ CERO:**

Es una matriz de orden $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ donde todas las entradas (elementos) son iguales a **cero**.

3.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. **La matriz nula** de orden $\mathbf{3} \times \mathbf{5}$ es:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

---

2. La **matriz nula** de orden **2** (entiéndase matriz cuadrada de orden

2 X 2) es:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

---

3. La **matriz nula** de orden **3** (entiéndase matriz cuadrada de orden

3 X3) es:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ IDENTIDAD**

Es una matriz cuadrada que cumple las siguientes condiciones:

- Es una **matriz cuadrada**.
- Las entradas (elementos) de la **diagonal principal** son iguales a **1.**

Nota: Se define como **Diagonal Principal** de una matriz las entradas (elementos) donde $\boldsymbol{i = j}$ **(Igual subíndice),** esto es:

$$\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots}$$

- Las demás entradas (elementos) son iguales a **cero**.
- La matriz identidad se simboliza con la letra**:** $\boldsymbol{I}$, se le debe colocar el subíndice indicando el orden, esto **es:**

- $\boldsymbol{I_2}$: Matriz Identidad de **orden 2**:

$$\boldsymbol{I_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{I_3}$: Matriz Identidad de **orden 3:**

$$\boldsymbol{I_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{I_4}$ **:** Matriz Identidad de **orden 4:**

$$\boldsymbol{I_4} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{I_n}$: Matriz Identidad de **orden n** con $\boldsymbol{n \in Z^+}$.

- **TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ**

Sea $\boldsymbol{A = [a_{i\,j}]}$ una matriz de orden $\boldsymbol{m \times n,}$ se define como la **matriz Transpuesta** de $\boldsymbol{A}$ a la matriz de orden $\boldsymbol{n \times m,}$ obtenida al intercambiar las **filas** por las **columnas** en la matriz $\boldsymbol{A}$, que se simboliza por $\boldsymbol{A'}$ $\boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{A^T}$, por lo tanto:

Si $\boldsymbol{A = [a_{i\,j}]} \rightarrow \boldsymbol{A^T = [a_{j\,i}]}$

Se dice, entonces, que sí:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{5a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

NOTA: Para determinar la transpuesta de una **matriz A**, basta con poner las columnas como filas o los filas como columnas.

3.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Dadas las siguientes matrices, escriba la transpuesta de cada una de ellas:

1. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \to A^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

La matriz A es de orden 4×3, por lo tanto su transpuesta A^T es de orden 3×4

---

2. Sea:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to C^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & -2 \\ 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz C es de orden 3×3, por lo tanto su transpuesta C^T es de orden 3×3, resultan del mismo orden ya que son matrices cuadradas.

---

3. Sea:

$$D = [-3 \quad -2 \quad -1] \to D^T = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matriz D es de orden 1×3, por lo tanto su transpuesta C^T es de orden 3×1

- **MATRIZ SIMÉTRICA**

Una matriz **cuadrada** $\boldsymbol{A}$ de orden $\boldsymbol{n}$ se llama **matriz simétrica** Si y solo sí:

$$\boldsymbol{A^T = A}$$

Por ejemplo:

- $A = A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \end{bmatrix}$
- $B = B^T \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 & -10 \\ 9 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 9 & 8 \\ -10 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

- **MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR**

Es una matriz que cumple las siguientes condiciones:

- Es una matriz cuadrada.
- Todas las entradas **debajo** de la **diagonal principal** son iguales a **cero**.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 & -10 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR**

Es una matriz que cumple las siguientes condiciones:

- Es una matriz cuadrada.
- Todas las entradas **encima** de la **diagonal principal** son iguales a **cero**.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ TRIANGULAR**

Es una matriz que cumple las siguientes condiciones:

- Es una matriz cuadrada.
- Todas las entradas por **encima** y por **debajo** de la **diagonal principal** son iguales a **cero**.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ DIAGONAL**

Una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada en que las entradas son **todas cero**, excepto en la diagonal principal, y éstas pueden ser cero o no.

Por ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

3.2.6 ALGEBRA DE MATRICES.

- **IGUALDAD DE MATRICES**.

Dos matrices A y B son iguales si cumplen las siguientes condiciones:

- Las matrices tienen el **mismo orden**.
- Si las entradas correspondientes de A y de B son iguales.

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{A = B \leftrightarrow a_{i\,j} = b_{i\,j,} \forall\ i, j}$$

3.2.7 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}\ \boldsymbol{y\ B} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Son **iguales**, ya que tienen el mismo orden (ambas son matrices de orden $\mathbf{3 \times 2}$), además sus entradas correspondientes son iguales:

ENTRADA EN A	ENTRADA EN B	Valor de entrada en A y en B
$\boldsymbol{a_{11}}$	$\boldsymbol{b_{11}}$	$\mathbf{8}$
$\boldsymbol{a_{12}}$	$\boldsymbol{b_{12}}$	$\mathbf{2}$
$\boldsymbol{a_{21}}$	$\boldsymbol{b_{21}}$	$\mathbf{5}$
$\boldsymbol{a_{22}}$	$\boldsymbol{b_{22}}$	$\mathbf{1}$
$\boldsymbol{a_{31}}$	$\boldsymbol{b_{31}}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{a_{32}}$	$\boldsymbol{b_{32}}$	$\mathbf{-2}$

---

2. Para que la matriz$A = \begin{bmatrix} 16 & x & y \\ 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ y la matriz $B = \begin{bmatrix} z & 10 & 3 \\ w & p & 9 \end{bmatrix}$, sean iguales, se debe cumplir que:

Igualando las respectivas entradas se tiene:

ENTRADA EN A	ENTRADA EN B	Valor de entrada en A y en B
$\boldsymbol{a_{11}}$	$\boldsymbol{b_{11}}$	$\boldsymbol{z = 16}$
$\boldsymbol{a_{12}}$	$\boldsymbol{b_{12}}$	$\boldsymbol{x = 10}$
$\boldsymbol{a_{13}}$	$\boldsymbol{b_{13}}$	$\boldsymbol{y = 3}$
$\boldsymbol{a_{21}}$	$\boldsymbol{b_{21}}$	$\boldsymbol{w = 8}$
$\boldsymbol{a_{22}}$	$\boldsymbol{b_{22}}$	$\boldsymbol{p = 5}$
$\boldsymbol{a_{23}}$	$\boldsymbol{b_{23}}$	$\boldsymbol{9 = 9}$

- **SUMA DE MATRICES.**

Para sumar (restar) matrices se deben tener en cuenta las siguientes condiciones:

- Las matrices deben tener el mismo orden.
- Se suman (o se restan) las entradas correspondientes (los elementos en sus respectivas posiciones).
- Se obtiene como resultado una matriz del mismo orden de las que se sumaron (o se restaron).

En general:

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, son matrices de orden $m \times n$, la suma $A + B$ es una matriz de orden $m \times n$ obtenida al sumar las entradas correspondientes, esto es:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

3.2.8 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Dadas las siguientes matrices encuentre la suma (o diferencia de las mismas):

1. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 9 \\ -1 & 6 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 16 & -9 \\ 7 & -8 & 9 & -8 \\ -5 & 6 & 3 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

a. Se suman las respectivas entradas (los elementos en sus posiciones):

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+3 & 7-2 & 2+12 & 9+15 \\ -1+4 & 6+5 & 2+16 & 4-9 \\ 8+7 & 0-8 & 1+9 & -8-8 \\ 1-5 & 3+6 & -5+3 & 4-6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

b. Se obtiene la matriz suma con el mismo orden de los sumandos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 14 & 24 \\ 3 & 11 & 18 & -5 \\ 15 & -8 & 10 & -16 \\ -4 & 9 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

---

2. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 1 \\ 2 & -8 & 3 \\ -5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 4 \\ -8 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow$$

a. Se suman las respectivas entradas (los elementos en sus posiciones):

$$A + B = \begin{bmatrix} -1-9 & -9+10 & 1+4 \\ 2-8 & -8+4 & 3-3 \\ -5+0 & 4-7 & 9-12 \end{bmatrix} \rightarrow$$

b. Se obtiene la matriz suma con el mismo orden de los sumandos:

$$\boldsymbol{A+B=\begin{bmatrix}-10 & 1 & 5\\ -6 & -4 & 0\\ -5 & -3 & -3\end{bmatrix}}$$

---

3. Sean:

$$\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ 3 & -8 & 2\end{bmatrix}\ y\ B=\begin{bmatrix}-9 & -3 & 6\\ 5 & 8 & -2\end{bmatrix}}$$

Realice las siguientes operaciones:

- $\boldsymbol{A+B=\begin{bmatrix}1-9 & -5-3 & 4+6\\ 3+5 & -8+8 & 2-2\end{bmatrix}\rightarrow A+B=\begin{bmatrix}-8 & -8 & 10\\ 8 & 0 & 0\end{bmatrix}}$

- $\boldsymbol{B+A=\begin{bmatrix}-9+1 & -3-5 & 6+4\\ 5+3 & 8-8 & -2+2\end{bmatrix}\rightarrow B+A=\begin{bmatrix}-8 & -8 & 10\\ 8 & 0 & 0\end{bmatrix}}$

- $\boldsymbol{A-B=\begin{bmatrix}1-(-)9 & -5-(-3) & 4-6\\ 3-5 & -8-8 & 2-(-2)\end{bmatrix}\rightarrow}$

  $\boldsymbol{A-B=\begin{bmatrix}1+9 & -5+3 & 4-6\\ 3-5 & -8-8 & 2+2\end{bmatrix}\rightarrow A-B=\begin{bmatrix}10 & -2 & -2\\ -2 & -16 & 4\end{bmatrix}}$

- $\boldsymbol{B-A=\begin{bmatrix}-9-1 & -3-(-5) & 6-4\\ 5-3 & 8-(-8) & -2-2\end{bmatrix}\rightarrow}$

  $\boldsymbol{B-A=\begin{bmatrix}-9-1 & -3+5 & 6-4\\ 5-3 & 8+8 & -2-2\end{bmatrix}\rightarrow B-A=\begin{bmatrix}-10 & 2 & 2\\ 2 & 16 & -4\end{bmatrix}}$

- $\boldsymbol{B+B=\begin{bmatrix}-9-9 & -3-3 & 6+6\\ 5+5 & 8+8 & -2-2\end{bmatrix}\rightarrow\ B+B=\begin{bmatrix}-18 & -6 & 12\\ 10 & 16 & -4\end{bmatrix}}$

- **Multiplicación por un escalar**

En matrices se denomina **escalar** a los números reales y/o constantes; para indicar que un número $\boldsymbol{k}$ es un escalar, se escribe: $\boldsymbol{k \epsilon R_e}$.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de orden $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{k \epsilon R_e}$.

La multiplicación de $\boldsymbol{k * A = A * k}$ se llama **Multiplicación de una matriz por un escalar.**

Esta se obtiene al multiplicar cada entrada (cada elemento) de la matriz $\boldsymbol{A}$ por el escalar $\boldsymbol{k}$, es decir,

$$\boldsymbol{k * A = k * [a_{i\,j}] = [ka_{i\,j}]}$$

3.2.9 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Dada la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 9 & 8 & 2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix}}$$

1. Hallar $\boldsymbol{3A}$:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 9 & 8 & 2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to 3A = 3 * \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 9 & 8 & 2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to}$$

$$\boldsymbol{3A = \begin{bmatrix} 3 * -1 & 3 * 3 & 3 * -6 \\ 3 * 9 & 3 * 8 & 3 * 2 \\ 3 * -10 & 3 * -4 & 3 * 0 \end{bmatrix} \to 3A = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -18 \\ 27 & 24 & 6 \\ -30 & -12 & 0 \end{bmatrix}}$$

---

2. Hallar $\boldsymbol{\frac{2}{3}A}$:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 9 & 8 & 2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to \frac{2}{3}A = \frac{2}{3} * \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 9 & 8 & 2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to}$$

$$\frac{2}{3}A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} * -1 & \frac{2}{3} * 3 & \frac{2}{3} * -6 \\ \frac{2}{3} * 9 & \frac{2}{3} * 8 & \frac{2}{3} * 2 \\ \frac{2}{3} * -10 & \frac{2}{3} * -4 & \frac{2}{3} * 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{2}{3}A = \begin{bmatrix} \frac{2 * -1}{3} & \frac{2 * 3}{3} & \frac{2 * -6}{3} \\ \frac{2 * 9}{3} & \frac{2 * 8}{3} & \frac{2 * 2}{3} \\ \frac{2 * -10}{3} & \frac{2 * -4}{3} & \frac{2 * 0}{3} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\frac{2}{3}A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{6}{3} & \frac{-12}{3} \\ \frac{18}{3} & \frac{16}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-20}{3} & \frac{-8}{3} & \frac{0}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{2}{3}A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 2 & -4 \\ 6 & \frac{16}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-20}{3} & \frac{-8}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

---

3. Hallar: $-5A$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 9 & 8 & 2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow -5A = 5 * \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 9 & 8 & 2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$-5A = \begin{bmatrix} -5 * -1 & -5 * 3 & -5 * -6 \\ -5 * 9 & -5 * 8 & -5 * 2 \\ -5 * -10 & -5 * -4 & -5 * 0 \end{bmatrix} \rightarrow -5A = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 30 \\ -45 & -40 & -10 \\ 50 & 20 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

- **PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES Y DE LA MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR.**

Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{C}$ Tres matrices de orden $m \times n$, $\propto y\ k$ dos escalares, se cumple que:

PROPIEDAD	ENUNCIADO
1. $A_{mn} + 0_{mn} = A_{mn}$	1. Toda matriz sumada con la matriz nula es igual a la misma matriz.
2. $0 * A = 0$	2. Toda matriz multiplicada por la matriz nula es igual a la matriz nula.
3. $A + B = B + A$	3. La suma de matrices, cumple la propiedad conmutativa de la suma.
4. $k * A = A * k$	4. La multiplicación de una matriz por un escalar, cumple la propiedad conmutativa de la multiplicación.

5. $\mathbf{1 * A = A}$	5. Toda matriz multiplicada por el escalar 1 (Elemento neutro), es igual a la misma matriz.
6. $\mathbf{-1 * A = -A}$	6. Al multiplicar una matriz por el escalar -1, se cambian todos los signos de la matriz.
7. $\mathbf{k * (A + B) = k * A + k * B}$	7. Propiedad distributiva de la suma de matrices respecto a un escalar.
8. $\mathbf{(k + \propto) * A = k * A + \propto * A}$	8. Propiedad distributiva de la suma de escalares respecto a una matriz.
9. $\mathbf{(A + B)^T = A^T + B^T}$	9. Una suma transpuesta de matrices es igual a la suma de cada una de las transpuestas de los sumandos.

- **Multiplicación de matrices o producto matricial.**

Para multiplicar dos matrices existe una condición fundamental que dice:

La multiplicación de dos matrices se puede realizar si y solo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz,

 # Columnas de la primera matriz= # Filas de la segunda matriz

Por lo tanto **la matriz producto** tendrá el **número de filas de la primera matriz** y el **número de columnas de la segunda matriz.**

En forma general:

$$\mathbf{A_{mn} * B_{nq} = C_{mq}}$$

Como se observa en la forma general:

- n: Columnas de la primera y filas de la segunda.
- En la matriz producto $\mathbf{C_{mq}}$, se tiene las filas de la primera y las columnas de la segunda.

  Ejemplo: Dado el producto de las siguientes matrices se obtiene como resultado otra matriz que contiene el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda:

MULTIPLICACIÓN	RESULTADO	ORDEN DE LA MATRIZ RESULTANTE
$\boldsymbol{A_{3x5}B_{5x4}}$	C_{3x4}	3×4
$\boldsymbol{A_{5x6}B_{6x3}}$	C_{5x3}	5×3
$\boldsymbol{A_{2x1}B_{1x6}}$	C_{2x6}	2×6
$\boldsymbol{A_{4x7}B_{4x3}}$	No se puede realizar, ya que las columnas de la primera matriz (7), son diferentes a los filas de la segunda matriz (4).	

- **PROCEDIMIENTO PARA MULTIPLICAR MATRICES**.

Si $\boldsymbol{A_{mn}}$ es una matriz de orden $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{B_{nq}}$ es una matriz de orden $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}$, la multiplicación de la matriz $\boldsymbol{A}$ por la matriz $\boldsymbol{B}$ dará una matriz $\boldsymbol{C_{mq}}$ de orden $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{q}$.

Para determinar las entradas de la matriz $\boldsymbol{A_{mn}B_{nq}} = \boldsymbol{C_{mq}}$, se procede de la siguiente manera:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B_{nxq} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

La multiplicación $\boldsymbol{A_{mn}B_{nq}}$ $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}$

Dará una matriz $\boldsymbol{C_{mq}}$ de la forma:

$$C_{mq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mq} \end{bmatrix}$$

Las entradas de la matriz $\boldsymbol{C_{m\,q}}$ se obtienen de la siguiente manera:

- **Fila 1**

- $\boldsymbol{C_{11}}$: Se obtiene multiplicando las correspondientes entradas de **la primera fila de la primera matriz** por las correspondientes entradas de **la primera columna de la segunda matriz** como se observa en la figura1:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

Figura 1

Esto es: $\boldsymbol{C_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{m1}}$

- $\boldsymbol{C_{12}}$ Se obtiene multiplicando las correspondientes entradas de **la primera fila de la primera matriz** por las correspondientes entradas de **la segunda columna de la segunda matriz** como se observa en la figura 2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

Figura 2

Esto es: $\boldsymbol{C_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \cdots + a_{1n}b_{n2}}$

Nota: De igual manera se obtienen las demás entradas de la primera fila de la matriz C, en general se multiplica la **primera fila de la primera matriz** por **todas y cada una de las columnas de la segunda matriz.**

- **Fila 2:**
- Para hallar $\boldsymbol{C_{21}}$, se efectúa la multiplicación que muestra la figura 3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

Figura 3

Esto es: $\boldsymbol{C_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + \cdots + a_{2n}b_{n1}}$

Para hallar $\boldsymbol{C_{22}}$ se utiliza la figura 4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

Figura 4

Esto es: $\boldsymbol{C_{21} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \cdots + a_{2n}b_{n2}}$

Nota: De igual manera se obtienen las demás entradas de cada una de las filas de la matriz C, en general se multiplican **todas y cada una de las filas de la primera matriz** por **todas y cada una de las columnas de la segunda matriz** (siguiendo el proceso descrito en la secuencia anterior).

3.2.10 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Dadas las siguientes matrices A y B, hallar $\boldsymbol{AB\ y\ BA}$

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\ y\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Procedimiento

a. Recuerde que:

$AB = C$

$A\ es\ del\ orden\ 2 \times 3,$

$B\ es\ del\ orden\ 3 \times 3$

Por lo tanto: $C\ es\ del\ orden\ 2 \times 3,$ Filas de la primera matriz y las columnas de la segunda matriz, obteniendo en forma general una matriz C de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} {**}$$

- Cálculo de las entradas de la matriz C
- Para hallar c_{11} se realiza la siguiente operación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (2) * (1) + (1) * (0) + (-6) * (-2) = 14$$

- Para hallar c_{12}:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (2) * (0) + (1) * (4) + (-6) * (1) = -2$$

- Para hallar c_{13}:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = (2) * (-3) + (1) * (2) + (-6) * (1) = -10$$

- Para hallar$\boldsymbol{c_{21}}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{c_{21} = (1) * (1) + (-3) * (0) + (2) * (-2) = -3}$

- Para hallar$\boldsymbol{c_{22}}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{c_{22} = (1) * (0) + (-3) * (4) + (2) * (1) = -10}$

- Para hallar$\boldsymbol{c_{23}}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{c_{23} = (1) * (-3) + (-3) * (2) + (2) * (1) = -7}$

b. Reemplazando en **, se tiene:

$$\boldsymbol{AB = C = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}}$$

- Cálculo de **BA**: Analizando el orden de las matrices:

$\boldsymbol{B\ es\ del\ orden\ 3 \times 3}$ (Primera matriz).

$\boldsymbol{A\ es\ del\ orden\ 2 \times 3}$ (Segunda matriz).

Como **B** es de orden **3 x 3** y **A** es de orden **2 X 3**, la multiplicación **no se puede efectuar**.

$$\boldsymbol{(3 \neq 2)}$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Para efectuar la multiplicación de matrices se tiene que cumplir que: **# Columnas de la primera matriz= # Filas de la segunda matriz.**

---

2. Dadas las siguientes matrices A y B, hallar $\boldsymbol{AB\ y\ BA}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Procedimiento

a. Recuerde que:

$$\boldsymbol{AB = C}$$

$\boldsymbol{A\ es\ del\ orden\ 2 \times 2,}$

$\boldsymbol{B\ es\ del\ orden\ 2 \times 2}$

Por lo tanto: $\boldsymbol{C\ es\ del\ orden\ 2 \times 2,}$ Filas de la primera matriz y las columnas de la segunda matriz, obteniendo en forma general una matriz $\boldsymbol{C}$ de la forma:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} **$$

- Cálculo de las entradas de la matriz C
- **Cálculo de AB**:

Como $\boldsymbol{A\ es\ del\ orden\ 2 \times 2}$ y $\boldsymbol{B\ es\ del\ orden\ 2 \times 2}$, la multiplicación se puede realizar y dará una matriz $\boldsymbol{C\ \ de\ orden\ 2 \times 2}$.

Efectuando las operaciones:

$$\boldsymbol{C = AB} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4)*(-3)+(3)*(6) & (4)*(2)+(3)*(7) \\ (-2)*(-3)+(5)*(6) & (-2)*(2)+(5)*(7) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{C = AB} = \begin{bmatrix} -12+18 & 8+21 \\ 6+30 & -4+35 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 6 & 29 \\ 36 & 31 \end{bmatrix} **$$

➢ **Cálculo de BA**:

$\boldsymbol{B = C}$

$\boldsymbol{B\ es\ del\ orden\ 2 \times 2}$ (Primera matriz).

$\boldsymbol{A\ es\ del\ orden\ 2 \times 2}$ (Segunda matriz).

Por lo tanto: $\boldsymbol{C\ es\ del\ orden\ 2 \times 2,}$ Filas de la primera matriz y las columnas de la segunda matriz, obteniendo en forma general una matriz $\boldsymbol{C}$ de la forma:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} **$$

Efectuando las operaciones:

$$\boldsymbol{C = BA} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)*(4)+(2)*(-2) & (-3)*(3)+(2)*(5) \\ (6)*(4)+(7)*(-2) & (6)*(3)+(7)*(5) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{C = AB} = \begin{bmatrix} -12-4 & -9+10 \\ 24-14 & 18+35 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ 10 & 53 \end{bmatrix} **$$

NOTA: Con la solución de los ejercicios se ve claramente que la multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir, que en términos generales $\boldsymbol{AB \neq BA}$.

- **PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES:**

Sean: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ Tres matrices cuyos productos se pueden efectuar y $\boldsymbol{k \in R_e}$, entonces:

PROPIEDAD	ENUNCIADO
$\boldsymbol{AB \neq BA}$.	La multiplicación de matrices **no cumple** la **propiedad conmutativa**.
$\boldsymbol{A(BC) = (AB)C}$.	En la multiplicación de matrices se **cumple** la **propiedad asociativa**.
$\boldsymbol{k(AB) = A(kB) = (AB)k}$	**Propiedad asociativa** de la multiplicación de matrices respecto a un escalar
$\boldsymbol{A(B+C) = AB + AC}$	**Propiedad distributiva (a la izquierda)** de la multiplicación respecto a la suma.
$\boldsymbol{(A+B)C = AC + BC}$	**Propiedad distributiva (a la derecha)** de la multiplicación respecto a la suma.

$AI = A$	La multiplicación de una matriz $\boldsymbol{A}$ por la **matriz identidad** $\boldsymbol{I}$ es igual a la misma matriz $\boldsymbol{A}$.
$IA = A$	La multiplicación de **la matriz identidad** $\boldsymbol{I}$ por una matriz $\boldsymbol{A}$, es igual a la misma matriz $\boldsymbol{A}$.
$(AB)^T = B^T A^T$	**La matriz transpuesta de un producto de matrices**, es igual a la matriz transpuesta de la segunda matriz por la matriz transpuesta de la primera matriz.

- **POTENCIA DE UNA MATRIZ**:

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n}$.

POTENCIA	IGUAL A…	RESULTADO
A^0	$=$	I
A^1	$=$	A
A^2	$=$	$A^2 = AA$
A^3	$=$	$A^3 = A^2A$
Y así sucesivamente.		

3.2.11 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, hallar:

a. $A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A^1 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

c. $A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$AA = \begin{bmatrix} (-1)*(-1)+(10)*(4) & (-1)*(10)+(10)*(5) \\ (4)*(-1)+(5)*(4) & (4)*(10)+(5)*(5) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$AA = \begin{bmatrix} 1+40 & -10+50 \\ -4+20 & 40+25 \end{bmatrix} \rightarrow AA = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 16 & 65 \end{bmatrix} = A^2$$

---

d. $A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 16 & 65 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$A^3 = \begin{bmatrix} (-1)*(41)+(10)*(16) & (-1)*(40)+(10)*(65) \\ (4)*(41)+(5)*(16) & (4)*(40)+(5)*(65) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -41+160 & -40+650 \\ 164+80 & 160+325 \end{bmatrix} \rightarrow A^2A = \begin{bmatrix} 119 & 610 \\ 244 & 485 \end{bmatrix} = A^3$$

---

2. Si $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

a. $B^0 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $B^1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

c. **ACTIVIDAD:** Compruebe, siguiendo el procedimiento del ejercicio anterior, que:

- $B^2 = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 6 \\ 35 & 100 & -43 \\ 38 & -20 & 50 \end{bmatrix}$

- $B^3 = \begin{bmatrix} 80 & -8 & 68 \\ 90 & -972 & 806 \\ 324 & 360 & 8 \end{bmatrix}$

- $B^4 = \begin{bmatrix} 27712 & 31616 & -464 \\ 180864 & 1234224 & -770864 \\ 60912 & -349632 & 312256 \end{bmatrix}$

3.2.12 EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. **Escriba la matriz en cada caso:**

a. Matriz A de orden 4X7 tal que: $a_{ij} = 5i - j \ \ para\ i = j \ \ a_{ij} = i + j \ \ para\ i \neq j$

b. Matriz cuadrada B de orden 5 tal que: $a_{ij} = (-1)^{i+j} \ \ para\ i < j$, $a_{ij} = i + j \ \ para\ i = j$ y $a_{ij} = (-3)^{j-i} \ \ para\ i > j$.

---

2. **Algebra de matrices.**

Para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 6 & 7 & 6 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 11 & 4 & -8 \\ -10 & 15 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar:

a. $(A + B)(A - B)$

b. $(A + B)^T$

c. $(A + B)^2$

d. $A^2 - B^2$

---

3. Encuentre los valores de x, y, z, w; de tal manera que se cumpla cada igualdad:

a. $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $5\begin{bmatrix} x & y \\ 4z & 5w \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2y+1 & 4x-3 \\ w & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & 3y+12 \\ w-3 & z+w+20 \end{bmatrix}$

---

4. ACTIVIDAD

a. Escriba la matriz A de orden $6X6$ tal que $a_{ij} = \dfrac{i+j}{2}$ cuando $i = j$ y $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ cuando $i > j$ y $a_{ij} = j - i$ cuando $i < j$

b. Escriba la matriz A de orden $4X5$ tal que $a_{ij} = 2i + 5j$ cuando $i = j$ y $a_{ij} = (i + j)^2$ cuando $i \neq j$

c. Escriba la matriz A de orden $5X3$ tal que $a_{ij} = i - 3j$ cuando $i > j$, $a_{ij} = (-1)^{1+j}$ cuando $i = j$ y $a_{ij} = \frac{i-2j}{3}$ cuando $i < j$

d. Escriba la matriz A de orden $6X6$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ cuando $i > j$, $a_{ij} = \frac{i+j}{2}$ cuando $i = j$ y $a_{ij} = j - 4i$ cuando $i < j$

e. Escriba la matriz A de orden $4X5$ tal que $a_{ij} = i * j$ cuando $i > j$, $a_{ij} = \frac{j}{i}$ cuando $i < j$ y $a_{ij} = 2j + 3i$ cuando $i = j$

---

5. Halle los valores correspondientes de cada letra:

a. $$\begin{bmatrix} 5 & -31 & 2 \\ 12 & 0 & 4 \\ -2 & 13 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-5 & b & c \\ d & e+3 & f \\ g-4 & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 10 & 4 & 23 \end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 2 & b & 1 \\ 5 & c+9 & -2 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e+7 & -2 & 4 \\ f-5 & 3 & g & 1 \end{bmatrix}$$

c. $$k\begin{bmatrix} 1 & a & 2 & b \\ c & 3 & d & 7 \\ e & f & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & g & -5 \\ 3 & h+10 & -6 & i+12 \\ 1 & 0 & j-3 & m \end{bmatrix}$$

---

6. Halle x, y, w, z, de tal manera que se cumpla la igualdad:

a. $$\begin{pmatrix} 3x+y-3 & z+1 \\ w-2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6+5w \\ 2-7z & 2x-y+z \end{pmatrix}$$

b. $$\begin{pmatrix} 5x-y+4 & 4 \\ z & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & w \\ 7y-3 & 15 \end{pmatrix}$$

c. $\begin{pmatrix} w+3z & x-y \\ 2x+3y & 5z-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4x-3y+5 \\ 20 & 3w-2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 7-3x & -3+5z \\ 4+5y & 10+2w-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-3y & z+w \\ 2y-x & 2z-w+7 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 & 19 \\ 0 & -62 \end{bmatrix}$

---

7. Halle: $A^T,\ B^T,\ A+B,\ 2A-3B \wedge 4B-3A$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 0 & -9 & -3 \\ 13 & 14 & 7 \\ 8 & 0 & 9 \\ 12 & 5 & -9 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} -3 & 12 & 6 \\ 8 & 6 & 7 \\ 5 & -14 & 7 \\ -34 & 7 & 9 \\ 12 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

---

8. **Hallar:** $A^T,\ A+B,\ B-A,\ (A+B)^T,\ A^T+B^T \wedge 2A-3B$ Con:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 & -5 \\ 2 & 45 & 6 & -7 \\ 9 & 4 & -9 & 23 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 34 & -2 & 4 & 6 \\ 7 & -6 & 7 & -8 \\ 5 & 5 & 7 & 43 \end{pmatrix}$$

---

9. **Hallar** $AB \wedge BA$ Para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -9 \\ 5 & 10 & 7 \\ -1 & 6 & 7 \\ 4 & -9 & 3 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & 4 & 6 & 7 \\ 9 & 0 & -4 & 23 \\ 7 & 3 & 8 & 9 \\ -6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

---

10. **Hallar** $CD \wedge DC$ Con:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 9 & 4 \end{bmatrix} \wedge D = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & 8 & -2 \\ 6 & -5 & 2 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

---

11. **Dadas las matrices**:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Halle:

a. $AB - BA$
b. $2AB$
c. $(A+B)(A-B)$
d. $A^2 - B^2$
e. $(A+B)^2$
f. $(A-B)^2$
g. $\left(A^T + B^T\right)^T$
h. $A^2 - AB + BA - B^2$
i. $A^2 + AB + BA + B^2$
j. $A^2 - AB - BA + B^2$

---

12. Para las matrices: $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 7 & 5\end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix}-5 & 12\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ compruebe que:

a. $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

b. $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$

c. $(A-B)^2 = A^2-AB-BA+B^2$

d. $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$

e. $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$

f. $AI_2 = A$

g. $BI_2 = B$

h. $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

---

13. Encuentre los valores de $x,\ y,\ z \wedge w$ de manera que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

---

14. Encuentre los valores de $x,\ y,\ z \wedge w$ tal que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 7 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 45\\ 6 & 23\end{pmatrix}$$

---

15. Encuentre los valores de $x,\ y,\ z \wedge w$ tal que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & -4\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

---

16. Encuentre los valores de $x,\ y,\ z \wedge w$ tal que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 10\\ -4 & 13\end{pmatrix}$$

17. Escriba las siguientes matrices:

a. Identidad de orden 6.
b. Identidad de orden 4.
c. Nula de orden 5X3.
d. Nula de orden 3X6.

4 UNIDAD 3 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES UTILIZANDO TÉCNICAS MATRICIALES Y APLICACIONES

4.1.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar las técnicas analíticas para solucionar sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial, explicando, además, en qué consisten los sistemas consistentes e inconsistentes y el algoritmo para la solución de sistemas de ecuaciones lineales por los métodos: Eliminación Gaussiana, Eliminación Gauss – Jordán, Matriz inversa y determinantes.

4.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar cuándo un sistema de ecuaciones tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.
- Solucionar sistemas de ecuaciones por medio de eliminación Gaussiana.
- Analizar los sistemas de ecuaciones homogéneas.
- Solucionar sistemas de ecuaciones por medio de eliminación Gauss-Jordan .
- Solucionar sistemas de ecuaciones lineales utilizando la matriz inversa.
- Solucionar sistemas de ecuaciones lineales utilizando la factorización de matrices.
- Solucionar sistemas de ecuaciones lineales mediante el empleo de determinantes.

4.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

- **Definición de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas**

Un sistema de ecuaciones lineales consiste en varias $\boldsymbol{m}$ ecuaciones y cada ecuación con $\boldsymbol{n}$ incógnitas, el sistema se caracteriza por que las variables tienen **potencia uno**, es decir, **son sistemas lineales**, no existe producto entre ellas y además no existen variables en el denominador.

Solucionar un sistema de ecuaciones consiste en encontrar una serie de valores $\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}, \boldsymbol{t_3}, \ldots \boldsymbol{t_n}$ que simultáneamente son solución de cada una de las ecuaciones, es decir si se remplazan todos los $\boldsymbol{t_i}$ en una ecuación se obtiene una **igualdad verdadera**.

EJEMPLOS

1. $\boldsymbol{3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10}$

$$-5x_1 + 7x_2 - 110x_3 = 1$$

$$12x_1 + x_2 + 7x_3 = 12$$

Es un sistema **3 X 3**

---

2. $$11x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 14x_4 = 16$$

$$-8x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 12x_4 = 12$$

Es un sistema **2 X 4**

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que: Cuando en el proceso de solución de un sistema de ecuaciones se llega a una ***igualdad falsa,*** esto quiere decir que ***el sistema no tiene solución.***

Cuando en el proceso de solución de un sistema de ecuaciones se llega a ***una igualdad verdadera,*** esto quiere decir que ***el sistema tiene infinitas soluciones***

- **SISTEMAS CONSISTENTES E INCONSISTENETES**

1. Un **sistema es consistente** cuando tiene **una única solución**, es decir, **las ecuaciones son independientes.**
2. Un **sistema es inconsistente** cuando **no tiene solución**.
3. Si **el sistema tiene infinitas soluciones**, se dice que **el sistema es consistente** pero las **ecuaciones son dependientes**.

- **FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES**

La forma matricial de un sistema de ecuaciones está dado por:

$$AX = B$$

Dónde:

- A Es la matriz que contiene los coeficientes, tiene orden $m \times n$.

- $\boldsymbol{X}$ Es la matriz de variables tiene orden $\boldsymbol{n} \times \mathbf{1}$.
- $\boldsymbol{B}$ Es la matriz en la cual se pone el término independiente de cada una de las ecuaciones. Es de orden $\boldsymbol{m} \times \mathbf{1}$.

NOTA: Para construir matrices a partir de sistemas de ecuaciones, se debe tener en cuenta lo siguiente:

a. **El término independiente** debe estar **aislado o despejado** (casi siempre a la derecha de la ecuación).
b. **Las variables** deben tener **el mismo orden** en todas las ecuaciones.
c. Es obligatorio **colocar ceros** los espacios donde **falte una de las variables**.

$\boldsymbol{n}$: Es el número de variables; $\boldsymbol{m}$: Es el número de ecuaciones.

EJEMPLO: Un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- El **<u>primer arreglo</u>** se llama **matriz de coeficientes**.
- El **<u>segundo arreglo</u>** se llama **matriz de variables,** note que las variables se colocan en el mismo orden o secuencia en que se encuentran en las ecuaciones.
- El **<u>tercer arreglo</u>** se llama **matriz de constantes** o **matriz del término independiente.**

Nota: También se puede escribir **la matriz aumentada**, que consiste en agregar a la matriz de coeficientes, la matriz de constantes en el lado derecho, as:

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} + a_{12} + a_{13} & b_1 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} & b_2 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

Matriz aumentada

4.2.1 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, construya la matriz de coeficientes, la matriz de constantes, la matriz de variables y la matriz aumentada.

1. $$\begin{cases} 3x & & -2z & = & 10 \\ 5x & -2y & +4z & = & 0 \\ & 7y & -5z & = & 4 \end{cases}$$

Procedimiento

a. El sistema quedaría (las variables que falten- espacios en blanco- en el sistema lineal se deben representar con cero):

$$\begin{cases} 3x & +0y & -2z & = & 10 \\ 5x & -2y & +4z & = & 0 \\ 0x & 7y & -5z & = & 4 \end{cases}$$

b. **La matriz de coeficientes**: Sea **C** la matriz coeficiente:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

c. **La matriz de variables**: Sea **V** la matriz de variables:

$$V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

d. **La matriz término independiente**: Sea **B** la matriz de términos independientes:

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e. **La matriz aumentada**: Sea **A** la matriz Aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 10 \\ 5 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 4 \end{array}\right]$$

---

2. $$\begin{cases} 2x & -y & & = & 10 \\ 5x & -2z & +4y & = & 11 \\ 10x & 7y & -5z & = & -4 \end{cases}$$

Procedimiento

a. El sistema quedaría (las variables que falten- espacios en blanco- en el sistema lineal se deben representar con cero):

Nota: En la segunda ecuación lineal se deben ordenar las variables, para que las tres tengan el mismo ordenamiento.

$$\begin{cases} 3x & -y & 0z & = & 10 \\ 5x & 4y & -2z & = & 11 \\ 10x & 7y & -5z & = & -4 \end{cases}$$

b. **La matriz de coeficientes**: Sea **C** la matriz coeficiente:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ 10 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

c. **La matriz de variables**: Sea **V** la matriz de variables:

$$V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

d. **La matriz término independiente**: Sea **B** la matriz de términos independientes:

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

e. **La matriz aumentada**: Sea **A** la matriz Aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 10 \\ 5 & 4 & -2 & 11 \\ 10 & 7 & -5 & -4 \end{array}\right]$$

- **FORMA ESCALONADA POR FILA DE UNA MATRIZ:**

Una matriz está en su **forma escalonada** por, fila, si tiene la siguiente apariencia:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: PIVOTE: En una matriz es la primera entrada **distinta de cero** $(entrada \neq 0)$ en **una fila.**

Los pivotes son los primeros asteriscos de **cada fila** (si son diferentes de cero) y los asteriscos restantes pueden ser o no ser ceros, de esta manera podemos decir que: una matriz está **en forma escalonada por fila** si:

a. Todas las filas que contienen solo ceros están agrupados en la parten inferior de la matriz.
b. En cada fila que no contiene solo ceros, el pivote se encuentra a la derecha del pivote de cada renglón por encima de él.

ACTIVIDAD

Las siguientes matrices están en su forma escalonada, verifique que cumplen con las propiedades anteriores:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{45} & \mathbf{23} & \mathbf{-8} & \mathbf{2} & \mathbf{-9} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{14} & \mathbf{15} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{23} & \mathbf{16} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{12} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

- **TEOREMA PARA TRANSFORMAR LAS FILAS DE UNA MATRIZ**

Dada la matriz de un sistema de ecuaciones lineales, las siguientes transformaciones conducen a la matriz de un sistema de ecuaciones equivalente:

a. Intercambiar dos filas cualesquiera.
b. Multiplicar todos los elementos de una fila por el mismo número $\boldsymbol{k \epsilon R_e}$ y $\boldsymbol{k \neq 0}$.
c. Sumar a los elementos de una fila, $\boldsymbol{k}$ veces los correspondientes elementos de cualquier otra fila, en donde $\boldsymbol{k \epsilon R_e}$.
d.

- **OPERACIONES ELEMENTALES EN UNA MATRIZ**

En una matriz se pueden efectuar las siguientes operaciones, llamadas operaciones elementales (por fila), y la matriz no se altera.

e. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.
f. Intercambiar dos filas.
g. Multiplicar una fila por una constante distinta de cero.

- **MÉTODOS MATRICIALES PARA SOLUCIONAR SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

- **MÉTODO 1: ELIMINACIÓN GAUSSIANA**

PROCEDIMEINTO PARA SOLUCIONAR UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN GAUSSIANA:

Se explicará el desarrollo del método mediante algunos ejemplos:

Nota: Utilizando **ELIMINACIÓN GAUSSIANA**, resuelva los siguientes sistemas:

1. $$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 \\ -6x_1 & +6x_2 & +5x_3 & = & -3 \\ 4x_1 & +4x_2 & +7x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Procedimiento

1. Se escribe la **matriz aumentada asociada**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & 5 & -3 \\ 4 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

2. Se reduce la matriz aumentada a **su forma escalonada**. Para ello se realizan los siguientes pasos:

a. Se convierte en **1** la entrada $a_{11,}$ esta entrada debe ser diferente de cero y se llama el **ELEMENTO PIVOTE.**

Para el ejemplo se tiene que:

- **CONDICIÓN**: Se multiplica la primera fila por $\frac{1}{2}$**,** esto es**:**

$$\frac{1}{2} * f_1$$

$$pero: \quad f_2 = f_{2\,,} y$$

$$f_3 = f_3$$

- La matriz queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 * \frac{1}{2} & -1 * \frac{1}{2} & -1 * \frac{1}{2} & 3 * \frac{1}{2} \\ -6 & 6 & 5 & -3 \\ 4 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -6 & 6 & 5 & -3 \\ 4 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

Nota: Si la entrada $\boldsymbol{a_{11}=0}$, se necesita realizar un **intercambio de filas** (para el ejemplo este paso no es necesario efectuarlo).

b. Con el **1** que hay en la entrada $\boldsymbol{a_{11}}$, se hacen **cero** todas las demás entradas en la primera columna, para ello sume un múltiplo apropiado de la primera fila a las demás filas, para el ejemplo:

- **CONDICIÓN**

$$\boldsymbol{f_1 = f_1}$$

$$\boldsymbol{f_2 = f_2 + 6f_1}$$

$$\boldsymbol{f_3 = f_3 - 4f_1}$$

Efectuando las operaciones en cada fila se tiene:

- ✓ **Primera fila**: $\boldsymbol{f_1 = f_1}$

$$\boldsymbol{a_{11} = a_{11}}$$

$$\boldsymbol{a_{12} = a_{12}}$$

$$\boldsymbol{a_{13} = a_{13}}$$

$$\boldsymbol{b_1 = b_1}$$

- ✓ **Segunda fila:** $\boldsymbol{f_2 = f_2 + 6f_1}$

$$\boldsymbol{a_{21} = -6 + 6(1) = -6 + 6 = 0}$$

$$\boldsymbol{a_{22} = 6 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 - 3 = 3}$$

$$\boldsymbol{a_{23} = 5 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 - 3 = 2}$$

$$\boldsymbol{b_2 = -3 + 6\left(\frac{3}{2}\right) = -3 + 9 = 6}$$

- ✓ **Tercera fila:** $f_3 = f_3 - 4f_1$

$$a_{31} = 4 - 4(1) = 4 - 4 = 0$$

$$a_{32} = 4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$$

$$a_{33} = 7 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 7 + 2 = 9$$

$$b_3 = 3 - 4\left(\frac{3}{2}\right) = 3 - 6 = -3$$

- ➢ La matriz queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 9 & -3 \end{array}\right]$$

c. Se repiten los pasos anteriores ignorando el primer renglón:

- ➢ **CONDICIÓN**

$$f_1 = f_1$$

$$f_2 = \left(\frac{1}{3}\right)f_2$$

$$f_3 = f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 9 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 * \frac{1}{3} & 3 * \frac{1}{3} & 2 * \frac{1}{3} & 6 * \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & 9 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 6 & 9 & -3 \end{array}\right]$$

d. Se deben volver cero todas las entradas debajo de la entrada a_{22} , para ello se utiliza el **1** de la entrada a_{22}

Se deben efectuar las siguientes operaciones en la matriz:

- **CONDICIÓN**

$$f_1 = f_1$$

$$f_2 = f_2$$

$$f_3 = f_3 - 6f_2$$

Para la **tercera fila** se tiene:

$$a_{31} = 0 - 6(0) = 0 + 0 = 0$$

$$a_{32} = 6 - 6(1) = 6 - 6 = 0$$

$$a_{33} = 9 - 6\left(\frac{2}{3}\right) = 9 - 4 = 5$$

$$b_3 = -3 - 6(2) = -3 - 12 = -15$$

- La matriz queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{array}\right]$$

e. Se convierte en **1** la entrada a_{33}:

- **CONDICIÓN**

$$f_1 = f_1$$

$$f_2 = f_2$$

$$f_3 = \frac{1}{5}(f_3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{2} \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{2} \\ \frac{1}{5}*0 & \frac{1}{5}*0 & \frac{1}{5}*5 & *\frac{1}{5}-15 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

La matriz está en **la forma escalonada**.

3. Se reescribe el sistema y se resuelve por sustitución hacia atrás, esto es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{cccccl} x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & = & \frac{3}{2} \rightarrow & \textit{Ecuación 1} \\ & x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & = & 2 \rightarrow & \textit{Ecuación 2} \\ & & x_3 & = & -3 \rightarrow & \textit{Ecuación 3} \end{array}$$

- De la ecuación 3 se tiene que: $x_3 = -3$
- Se reemplaza este valor en la ecuación **2** y se despeja x_2:

$$x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 2 \rightarrow x_2 + \frac{2}{3}(-3) = 2 \rightarrow x_2 - 2 = 2 \rightarrow x_2 = 2 + 2 \rightarrow x_2 = 4$$

- Se reemplazan estos valores, $x_3 = -3$, $x_2 = 4$ en la ecuación **1** y se despeja x_1

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2} \rightarrow x_1 - \frac{1}{2}(4) - \frac{1}{2}(-3) = \frac{3}{2} \rightarrow x_1 - 2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2$$

$$x_1 = 2$$

- **Prueba**: Se reemplazan los valores obtenidos en las ecuaciones originales, esto es:

$$\begin{array}{cccccc} 2(2) & -4 & -(-3) & = & 3 \rightarrow 4 - 4 + 3 = 3 \rightarrow 3 = 3 \\ -6(2) & +6(4) & +5(-3) & = & -3 \rightarrow -12 + 24 - 15 = -3 \rightarrow -3 = -3 \\ 4(2) & +4(4) & +7(-3) & = & 3 \rightarrow 8 + 16 - 21 = 3 \rightarrow 3 = 3 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -3$$

---

2. Utilizando **ELIMINACIÓN GAUSSIANA** Resuelva el sistema:

$$2x + 8y - z + w = 0$$

$$4x + 16y - 3z - w = -10$$

$$-2x + 4y - z + 3w = -6$$

$$-6x + 2y + 5z + w = 3$$

Procedimiento

a. Se obtiene la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 16 & -3 & -1 & -10 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -6 \\ -6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Se convierte la entrada a_{11} en **1**:
- CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{2}(f_1) \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = f_3 \\ f_4 = f_4 \end{array}}$$

- La matriz queda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 16 & -3 & -1 & -10 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -6 \\ -6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} * 2 & \frac{1}{2} * 8 & \frac{1}{2} * -1 & \frac{1}{2} * 1 & \frac{1}{2} * 0 \\ 4 & 16 & -3 & -1 & -10 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -6 \\ -6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -{}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 4 & 16 & -3 & -1 & -10 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -6 \\ -6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Se convierten en ceros cada una de las entradas debajo del **1** anterior:

- CONDICIÓN

$$f_1 = f_1$$

$$f_2 = f_2 - 4f_1$$

$$f_3 = f_3 + 2f_1$$

$$f_4 = f_4 + 6f_1$$

- Para la **fila 2 se** tiene:

$$a_{21} = 4 - 4(1) = 4 - 4 = 0$$

$$a_{22} = 16 - 4(4) = 16 - 16 = 0$$

$$a_{23} = -3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 + 2 = -1$$

$$a_{24} = -1 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = -1 - 2 = -3$$

$$b_2 = -10 - 4(0) = -10 - 0 = -10$$

- Para la **fila 3**:

$$a_{31} = -2 + 2(1) = -2 + 2 = 0$$

$$a_{32} = 4 + 2(4) = 4 + 8 = 12$$

$$a_{33} = -1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 1 = -2$$

$$a_{34} = 3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 1 = 4$$

$$b_3 = -6 + 2(0) = -6 + 0 = -6$$

- Para la **fila 4**:

$$a_{41} = -6 + 6(1) = -6 + 6 = 0$$

$$a_{42} = 2 + 6(4) = 2 + 24 = 26$$

$$a_{43} = 5 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 - 3 = 2$$

$$a_{44} = 1 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 3 = 4$$

$$b_4 = 3 + 6(0) = 3 + 0 = 3$$

- La matriz queda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -{}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 12 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 26 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

- Como la entrada a_{22}es igual a **cero** (resaltada en amarillo en la matriz), se debe hacer **intercambio** de **fila**.
- Se cambia $f_2\ con\ f_3$

La matriz queda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -{}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 26 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

- CONDICIÓN:

$$f_2 = \frac{1}{12}(f_2)$$

Efectuando la operación indicada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1/2 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 4 & | & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & | & -10 \\ 0 & 26 & 2 & 4 & | & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1/2 & 1/2 & | & 0 \\ \frac{1}{12}*0 & \frac{1}{12}*12 & \frac{1}{12}*-2 & \frac{1}{12}*4 & | & \frac{1}{12}*-6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & | & -10 \\ 0 & 26 & 2 & 4 & | & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1/2 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 1/3 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & | & -10 \\ 0 & 26 & 2 & 4 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Se deben convertir en **cero** las entradas debajo del **1** anterior:

- **CONDICIÓN**

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 \\ f_3 &= f_3 \\ f_4 &= f_4 - 26f_2 \end{aligned}}$$

- Para la **fila 4** (resaltada en amarillo)

$$a_{41} = 0 - 26(0) = 0 - 0 = 0$$

$$a_{42} = 26 - 26(1) = 26 - 26 = 0$$

$$a_{43} = 2 - 26\left(-\frac{1}{6}\right) = 2 + \frac{13}{3} = \frac{6+13}{3} = \frac{19}{3}$$

$$a_{44} = 4 - 26\left(\frac{1}{3}\right) = 4 - \frac{26}{3} = \frac{12-26}{3} = -\frac{14}{3}$$

$$b_4 = 3 - 26\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 + 13 = 16$$

La matriz queda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -{}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{1}/_{6} & {}^{1}/_{3} & -{}^{1}/_{2} \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{14}{3} & 16 \end{array}\right]$$

Se convierte en 1 la entrada a_{33}:

- CONDICIÓN:

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = -f_3 \\ f_4 = f_4 \end{array}}$$

Para la **fila 3:**Se multiplica $f_3\ por - 1$

- $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -{}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{1}/_{6} & {}^{1}/_{3} & -{}^{1}/_{2} \\ 0 * -1 & 0 * -1 & -1 * -1 & -3 * -1 & -10 * -1 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{14}{3} & 16 \end{array}\right] \rightarrow$$

Realizando las operaciones indicadas:

- $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -{}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{1}/_{6} & {}^{1}/_{3} & -{}^{1}/_{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{14}{3} & 16 \end{array}\right]$$

- Se deben convertir en cero las entradas debajo del 1 anterior:
- CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = -f_3 \\ f_4 = f_4 - \frac{19}{3} f_3 \end{array}}$$

- Para la **fila 4:**
  - $a_{41} = 0 - \frac{19}{3}(0) = 0 - 0 = 0$
  - $a_{42} = 0 - \frac{19}{3}(0) = 0 - 0 = 0$
  - $a_{43} = \frac{19}{3} - \frac{19}{3}(1) = \frac{19}{3} - \frac{19}{3} = 0$
  - $a_{44} = -\frac{14}{3} - \frac{19}{3}(3) = -\frac{14}{3} - \frac{57}{3} = \frac{-14-57}{3} = -\frac{71}{3}$
  - $b_4 = 16 - \frac{19}{3}(10) = 16 - \frac{190}{3} = \frac{48-190}{3} = -\frac{142}{3}$

La matriz queda:

- $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{71}{3} & -\frac{142}{3} \end{array}\right]$

  Se convierte en **1** la entrada a_{44}:

- **CONDICIÓN**

  $f_1 = f_1$

  $f_2 = f_2$

  $f_3 = f_3$

  $f_4 = -\frac{3}{71} f_4$

La matriz queda:

- $$\left[\begin{matrix}1 & 4 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & -1/6 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{71}{3}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\ -1/2\\ 10\\ -\frac{142}{3}\end{matrix}\right]\rightarrow$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 4 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & -1/6 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0*-\frac{3}{71} & 0*-\frac{3}{71} & 0*-\frac{3}{71} & -\frac{71}{3}*-\frac{3}{71}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\ -1/2\\ 10\\ -\frac{142}{3}*-\frac{3}{71}\end{matrix}\right]\rightarrow$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 4 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & -1/6 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\ -1/2\\ 10\\ 2\end{matrix}\right]$$

La matriz está en **la forma escalonada**.

b. Se reescribe el sistema de ecuaciones:

- ✓ $x+4y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}w=0\ Ecuación\ 1$
- ✓ $y-\frac{1}{6}z+\frac{1}{3}w=-\frac{1}{2}\ Ecuación\ 2$
- ✓ $z+3w=10\ Ecuación\ 3$
- ✓ $w=2\ Ecuación\ 4$

c. El sistema se resuelve por sustitución hacia atrás, esto es:

- Se reemplaza la $Ecuación\ 4$ en la $Ecuación\ 3$:

$$z+3w=10\rightarrow z+3(2)=10\rightarrow z+6=10\rightarrow z=10-6\rightarrow z=4$$

- Se reemplazan los valores de z, w en la $Ecuación\ 2$:

$$y-\frac{1}{6}z+\frac{1}{3}w=-\frac{1}{2}\rightarrow y-\frac{1}{6}(4)+\frac{1}{3}(2)=-\frac{1}{2}\rightarrow y-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\rightarrow$$

$$y=-\frac{1}{2}$$

- Se reemplazan los valores de y, z, w en la $Ecuación 1$:

$$x+4y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}w=0\rightarrow x+4\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(4)+\frac{1}{2}(2)=0\rightarrow$$

$$x-2-2+1=0\rightarrow x-3=0\rightarrow x=3$$

La solución del sistema es: $\boldsymbol{x=3}, \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}}, \boldsymbol{z=4}, \boldsymbol{w=2}$

ACTIVIDAD: Realice la prueba reemplazando los valores en las ecuaciones originales, tome el ejercicio anterior como ejemplo.

ACTIVIDAD: Encuentre la solución del siguiente sistema, tome el ejercicio anterior como ejemplo, resuélvalo y confróntelo con su tutor.

$$\begin{cases} x & +2y & +z=-6 \\ 4x & -2y & -z=-4 \\ 2x & -y & +3z=19 \end{cases}$$

Respuesta: solución del sistema es:$(-2,-5,\ 6)$

- **Solución de sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones**:

3. Solucione el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +y & +z=2 \\ 5x & -2y & +2z=0 \\ 8x & +y & +5z=6 \end{cases}$$

Procedimiento

a. Se obtiene la matriz de aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- Como la entrada a_{11} es **1, por lo tanto** se convierten en cero las entradas que están por debajo del mismo:
  - **CONDICIÓN**

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1=f_1 \\ f_2=f_2-5f_1 \\ f_3=f_3-8f_1 \end{array}}$$

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5-5(1) & -2-5(1) & 2-5(1) & 0-5(2) \\ 8-8(1) & 1-8(1) & 5-8(1) & 6-8(2) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5-5 & -2-5 & 2-5 & 0-10 \\ 8-8 & 1-8 & 5-8 & 6-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & -10 \\ 0 & -7 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

Se convierte en 1 la entrada a_{22}:

- **CONDICIÓN:**

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= -\frac{1}{7}f_2 \\ f_3 &= f_3 \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & -10 \\ 0 & -7 & -3 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 * -\frac{1}{7} & -7 * -\frac{1}{7} & -3 * -\frac{1}{7} & -10 * -\frac{1}{7} \\ 0 & -7 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & -7 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:
  - **CONDICIÓN:**

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 \\ f_3 &= f_3 + 7f_2 \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & -7 & -3 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0+7(0) & -7+7(1) & -3+7\left(\frac{3}{7}\right) & -10+7(\frac{10}{7}) \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones indicadas, se obtiene la **matriz** en la cual la entrada $a_{33} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Se reescribe el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \; \textit{Ecuación } 1 \\ y+\frac{3}{7}z=\frac{10}{7} \; \textit{Ecuación } 2 \\ 0=0 \; \textit{Igualdad verdadera} \end{cases}$$

Nota: Como se llega a **una igualdad verdadera**, el sistema tiene **infinitas soluciones**.

- De la ecuación 2 se despeja y:

$$y+\frac{3}{7}z=\frac{10}{7} \; \textit{Ecuación } 2 \rightarrow y=\frac{10}{7}-\frac{3}{7}z \; \textit{Ecuación } 3$$

Se reemplaza la **ecuación 3** en la **ecuación 1**:

$$\textit{Ecuación } 1 \rightarrow x+y+z=2 \rightarrow x+\left(\frac{10}{7}-\frac{3}{7}z\right)+z=2 \rightarrow$$

$x+\frac{10}{7}-\frac{3}{7}z+z=2 \rightarrow x=-\frac{10}{7}+\frac{3}{7}z-z+2 \rightarrow$Reduciendo términos semejantes:

$$x=\frac{4}{7}-\frac{4}{7}z$$

- Para indicar una solución más general:

Haciendo: $z=k$ **donde** $k \epsilon R_e$, entonces la solución del sistema (x, y, z) es:

$$\left(\frac{4}{7}-\frac{4}{7}k, \quad \frac{10}{7}-\frac{3}{7}k, \quad k\right)$$

- ➢ Para cada número real k se obtiene una solución para el sistema dado, se revisarán algunos valores:

k	(x, y, z) $\left(\frac{4}{7}-\frac{4}{7}k,\quad \frac{10}{7}-\frac{3}{7}k,\quad k\right)$	SOLUCIÓN
0	$\frac{4}{7}-\frac{4}{7}(0),\quad \frac{10}{7}-\frac{3}{7}(0),\quad 0$	$\left(\frac{4}{7},\quad \frac{10}{7},\quad 0\right)$
1	$\frac{4}{7}-\frac{4}{7}(1),\quad \frac{10}{7}-\frac{3}{7}(1),\quad 1$	$(0,\quad 1,\quad 1)$
2	$\frac{4}{7}-\frac{4}{7}(2),\quad \frac{10}{7}-\frac{3}{7}(2),\quad 2$	$\left(-\frac{4}{7},\quad \frac{4}{7},\quad 2\right)$
3	$\frac{4}{7}-\frac{4}{7}(3),\quad \frac{10}{7}-\frac{3}{7}(3),\quad 3$	$\left(-\frac{8}{7},\quad \frac{1}{7},\quad 3\right)$

ACTIVIDAD: Realiza el mismo cuadro asignando **3 valores negativos.**

---

4. Solucione el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x & -y & -z & = 0 \\ 2x & +3y & & = 1 \\ 8x & & -3z & = 4 \end{cases}$$

PROCEDIMIENTO

a. Se obtiene la matriz de aumentada:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se convierte en **1** la entrada a_{11}:

- ➢ **CONDICIÓN:**

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 = \frac{1}{2}(f_1) \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = f_3 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} * (2) & \frac{1}{2} * (-1) & \frac{1}{2} * (-1) & \frac{1}{2} * (0) \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & (-\frac{1}{2}) & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 - 2f_1 \\ f_3 = f_3 - 8f_1 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2-2(1) & 3-2(-\frac{1}{2}) & 0-2\left(-\frac{1}{2}\right) & 1-2(0) \\ 8-8(1) & 0-8(-\frac{1}{2}) & -3-8\left(-\frac{1}{2}\right) & 4-8(0) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2-2 & 3+1 & 0+\frac{2}{2} & 1-0 \\ 8-8 & 0+\frac{8}{2} & -3+\frac{8}{2} & 4-0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{22}

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1$$
$$f_2 = \frac{1}{4}(f_2)$$
$$f_3 = f_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4}*0 & \frac{1}{4}*4 & \frac{1}{4}*1 & \frac{1}{4}*1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{0}{4} & \frac{4}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1$$
$$f_2 = f_2$$
$$f_3 = f_3 - 4(f_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0-4(0) & 4-4(1) & 1-4\left(\frac{1}{4}\right) & 4-4(\frac{1}{4}) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0-0 & 4-4 & 1-\left(\frac{4}{4}\right) & 4-(\frac{4}{4}) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

b. Se reescribe el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \; Ecuación\ 1 \\ y+\frac{1}{4}z=\frac{1}{4} \; Ecuación\ 2 \\ 0=3 \; Igualdad\ falsa \end{cases}$$

c. Como se llega a una igualdad falsa $(0=3)$, **el sistema es inconsistente**, quiere decir que **no tiene solución**.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Dado el sistema:

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ ex+fy+gz=0 \\ ix+jy+kz=0 \end{cases}$$

Es homogéneo porque **término independiente** en todas las ecuaciones es **igual a cero**.

Nota: Un **sistema lineal homogéneo** siempre tiene la solución trivial $(0,0,0)$**,** por lo tanto estos siempre son **sistemas consistentes**; además de la **solución trivial** pueden tener también **infinitas soluciones no triviales**.

ACTIVIDAD: Siguiendo el proceso anterior solucione el siguiente sistema, determine el número de soluciones, si las tiene, confronte con el tutor su validez.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 5x-2y+2z=0 \\ 8x+y+5z=0 \end{cases}$$

MÉTODO 2: ELIMINACIÓN GAUSS – JORDAN

Este método consiste en llevar la **matriz aumentada** del sistema a una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

Todas las entradas de la **diagonal principal** son iguales a **1** y todas las entradas **arriba y abajo** de la diagonal principal son **iguales a cero**.

Una matriz de este tipo se dice que está en su forma **<u>ESCALONADA REDUCIDA POR RENGLÓN.</u>**

Donde los números $\boldsymbol{a, b, c, d, \ldots \epsilon R_e}$ **.**

Se deduce de lo anterior que:

$\boldsymbol{x_1 = a}$

$\boldsymbol{x_2 = b}$

$\boldsymbol{x_3 = c}$

$\boldsymbol{x_4 = d}$

:

$\boldsymbol{x_{n\ldots}}$

4.2.2 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

Utilizando **ELIMINACIÓN GAUSS – JORDAN** resuelva los siguientes sistemas:

Ejercicio tomado de GROSSMAN. Stanley I. Álgebra lineal. 5 ed. México: Mc Graw Hill, 1966. P 7

1. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

Procedimiento

a. Se obtiene **la matriz de aumentad**a:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{11}

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = \frac{1}{2}(f_1)$$
$$f_2 = f_2$$
$$f_3 = f_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 * (2) & 1/2 * (4) & 1/2 * (6) & 1/2 * (18) \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Efectuando las operaciones indicadas**:**

$$\begin{bmatrix} 2/2 & 4/2 & 6/2 & 18/2 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1$$
$$f_2 = f_2 - 4(f_1)$$
$$f_3 = f_3 - 3(f_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4-4(1) & 5-4(2) & 6-4(3) & 24-4(9) \\ 3-3(1) & 1-3(2) & -2-3(3) & 4-3(9) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4-4 & 5-8 & 6-12 & 24-36 \\ 3-3 & 1-6 & -2-9 & 4-27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

- ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boldsymbol{f_1 = f_1}$$

$$\boldsymbol{f_2 = -\frac{1}{3}(f_2)}$$

$$\boldsymbol{f_3 = f_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -1/3 * 0 & -1/3 * -3 & -1/3 * -6 & -1/3 * -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -\frac{0}{3} & -\frac{-3}{3} & -\frac{-6}{3} & -\frac{-12}{3} \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por encima y por debajo del **1** obtenido:

- ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boldsymbol{f_1 = f_1 - 2(f_2)}$$

$$\boldsymbol{f_2 = f_2}$$

$$\boldsymbol{f_3 = f_3 + 5(f_2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 - 2 * (0) & 2 - 2 * (1) & 3 - 2 * (2) & 9 - 2 * (4) \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 + 5 * (0) & -5 + 5 * (1) & -11 + 5 * (2) & -23 + 5 * (4) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 - 0 & 2 - 2 & 3 - 4 & 9 - 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 + 0 & -5 + 5 & -11 + 10 & -23 + 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{33}:

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1$$
$$f_2 = f_2$$
$$f_3 = -f_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1*0 & -1*0 & -1*-1 & -1*-3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por encima del **1** obtenido:

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1 + f_3$$
$$f_2 = f_2 - 2(f_3)$$
$$f_3 = f_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 & -1+1 & 1+3 \\ 0-2*(0) & 1-2*(0) & 2-2*(1) & 4-2*(3) \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 & -1+1 & 1+3 \\ 0-0 & 1-0) & 2-2 & 4-6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b. La solución del sistema reemplazando las respectivas variables:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 4 \\ 0 & y & 0 & -2 \\ 0 & 0 & z & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

ACTIVIDAD: Con los valores obtenidos realizar la correspondiente prueba.

---

2. En el siguiente ejercicio se deben completar los procesos a partir de las condiciones dadas (tomar el ejercicio anterior como referencia).

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 4y + 8z + 16w = 26 \\ 3x + 9y + 27z + 81w = 144 \\ 4x + 16y + 64z + 256w = 468 \end{cases}$$

Procedimiento

a. La matriz aumentada es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 26 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 144 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 468 \end{bmatrix}$$

- Como la entrada a_{11} es 1**,** se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1**:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 - 2(f_1) \\ f_3 &= f_3 - 3(f_1) \\ f_4 &= f_4 - 4(f_1) \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 26 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 144 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 468 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1$$
$$f_2 = \frac{1}{2}(f_2)$$
$$f_3 = f_3$$
$$f_4 = f_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por encima y por debajo del **1** obtenido:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1 - f_2$$
$$f_2 = f_2$$
$$f_3 = f_{3-}6f_2$$
$$f_4 = f_4 - 12f_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada $\boldsymbol{a_{33}}$:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 \\ f_3 &= \frac{1}{6}(f_3) \\ f_4 &= f_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por encima y por debajo del **1** obtenido:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 + 2f_3 \\ f_2 &= f_2 - 3f_3 \\ f_3 &= f_3 \\ f_4 &= f_4 - 24f_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{44}:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1$$
$$f_2 = f_2$$
$$f_3 = f_3$$
$$f_4 = \frac{1}{24}(f_4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por encima del **1** obtenido:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1 - 6(f_4)$$
$$f_2 = f_2 + 11(f_4)$$
$$f_3 = f_3 - 6(f_4)$$
$$f_4 = f_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b. La solución del sistema reemplazando las respectivas variables:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ w = 2 \end{cases}$$

ACTIVIDAD: Con los valores obtenidos realizar la correspondiente prueba.

---

3. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2y + 3z = 4 \\ 2x - 6y + 7z = 15 \\ x - 2y + 5z = 10 \end{cases}$$

Procedimiento

a. La matriz aumentada es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

- Como la entrada a_{11} es **cero**, se intercambia la **fila 1** con la **fila 3**:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_{2-}2(f_1) \\ f_3 = f_3 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2-2*(1) & -6-2*(-2) & 7-2*(5) & 15-2*(10) \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2-2 & -6+4 & 7-10 & 15-20 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1$$
$$f_2 = -\frac{1}{2}(f_2)$$
$$f_3 = f_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ -1/2*(0) & -1/2*(-2) & -1/2*(-3) & -1/2*(-5) \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ -\frac{0}{2} & -\frac{-2}{2} & -\frac{-3}{2} & -\frac{-5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se convierten en **cero** las entradas que están por encima y por debajo del **1** obtenido:

✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1 + 2f_2$$
$$f_2 = f_2$$
$$f_3 = f_3 - 2f_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+2*0 & -2+2*1 & 5+2*3/2 & 10+2*5/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0-2*0 & 2-2*1 & 3-2*\frac{3}{2} & 4-2*5/2 \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 5+3 & 10+5 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0-0 & 2-2 & 3-3 & 4-5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{33}: No es posible convertir esta entrada **(0)** en **1,** por lo tanto la reducción de la matriz acaba en este punto.

b. Rescribiendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 8z = 15 \; Ecuación\ 1 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{5}{2} \; Ecuación\ 2 \\ 0 = -1 \; Igualdad\ falsa \end{cases}$$

Como se llega a una **igualdad falsa** $(0 = -1)$, quiere decir que el **sistema no tiene solución**.

---

4. **ACTIVIDAD**: Solucione el siguiente sistema de ecuaciones lineales, utilizando el método de Gauss-Jordan y demuestre (utilizando como guía los ejercicios anteriores) que el sistema tiene **infinitas soluciones:**

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 2x + 7y + 12z = 30 \end{cases}$$

Respuesta: El sistema tiene infinitas soluciones que son:

$$x = 1 + k, \quad y = 4 - 2k, \qquad z = k; \quad con\ k \in R_e$$

- **MÉTODO 3: MATRIZ INVERSA**

MATRIZ INVERSA

DEFINICIÓN: Es una **matriz cuadrada especial** que tiene la característica que **al ser multiplicada por la matriz que la genera** produce la **matriz de identidad**. La matriz inversa **es única**.

Si A es una **matriz cuadrada** de orden n, su inversa se simboliza por A^{-1} que también es una **matriz cuadrada** de orden n.

Para hallar la matriz inversa es utilizando el método de **matriz aumentada**, en la cual la matriz de **coeficientes** se debe aumentar con **la matriz identidad,** esto es**:**

MATRIZ AUMENTADA

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones, como las realizadas en los ejercicios anteriores, se debe convertir la **matriz original** en la **matriz identidad** y la **matriz identidad** en la **matriz inversa**, esto es:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

En general:

MATRIZ ORIGINAL	MATRIZ AUMENTADA	MATRIZ INVERSA
A	AI	IA^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
$(A^{-1})^{-1} = A$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

4.2.3 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Encontrar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Procedimiento

a. Se determina **la matriz aumentada** con la **matriz identidad de orden tres**:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{11}:

✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = \frac{1}{2}(f_1)$$

$$f_2 = f_2$$

$$f_3 = f_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2*2 & 1/2*4 & 1/2*6 & 1/2*1 & 1/2*0 & 1/2*0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 2/2 & 4/2 & 6/2 & 1/2 & 0/2 & 0/2 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:

✓ **CONDICIÓN**:

$$f_1 = f_1$$

$$f_2 = f_2 - 4f_1$$

$$f_3 = f_3 - 3f_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4-4(1) & 5-4(2) & 6-4(3) & 0-4(1/2) & 1-4(0) & 0-4(0) \\ 3-3(1) & 1-3(2) & -2-3(3) & 0-3(1/2) & 0-3(0) & 1-3(0) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4-4 & 5-8 & 6-12 & 0-4/2 & 1-0 & 0-0 \\ 3-3 & 1-6 & -2-9 & 0-3/2) & 0-0 & 1-0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{gathered} f_1 = f_1 \\ f_2 = -\frac{1}{3}(f_2) \\ f_3 = f_3 \end{gathered}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/3*0 & -1/3*-3 & -1/3*-6 & -1/3*-2 & -1/3*1 & -1/3*0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/3*0 & -1/3*-3 & -1/3*-6 & -1/3*-2 & -1/3*1 & -1/3*0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0/3 & 3/3 & 6/3 & 2/3* & -1/3 & 0/3 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se convierten en **cero** las entradas que están por encima y por debajo del **1** obtenido:

✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{gathered} f_1 = f_1 - 2f_2 \\ f_2 = f_2 \end{gathered}}$$

$$\boxed{f_3 = f_3 + 5f_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2-2(1) & 3-2(2) & 1/2-2(2/3) & 0-2(-1/3) & 0-2(0) \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0-5(0) & -5+5(1) & -11+5(2) & -\frac{3}{2}+5(2/3) & 0+5(1/3) & 1+5(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2-2 & -1 & 1/2-4/3 & 0+2/3| & 0-0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0-0 & -5+5 & -11+10 & -3/2+10/3 & 0+5/3 & 1-0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -5/6 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 11/6 & -5/3) & 1 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{gathered} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = (-1)f_3 \end{gathered}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -5/3) & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -5/6 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ (-1)*0 & (-1)*0 & (-1)*-1 & (-1)\ *11/6 & (-1)*-5/3 & (-1)*1 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5/6 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1 \end{array}\right]$$

Se convierten en **cero** las entradas que están por encima del **1** obtenido:

- ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 = f_1 + f_3 \\ f_2 = f_2 - 2f_3 \\ f_3 = f_3 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1+0 & 0+0 & -1+1 & -5/6-11/6 & 2/3+5/3 & 0-1 \\ 0-2(0) & 1-2(0) & 2-2(1) & 2/3-2(-11/6) & -\frac{1}{3}-2(5/3) & 0-2(-1) \\ 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1 \end{array}\right]$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -8/3 & 7/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 & -1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1 \end{array}\right]$$

b. Por lo tanto la matriz inversa es:

$$\begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

c. Se debe probar que: $AA^{-1} = I_3$**,** Esto es**:**

$$AA^{-1} = I_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ACTIVIDAD: Realiza la demostración que queda indicada y verifica que si se cumple la respectiva propiedad.

---

2. Hallar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

Procedimiento

a. Se determina **la matriz aumentada** con la **matriz identidad de orden tres**:

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]$$

- Como la entrada a_{11} =**1,** Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:

  ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 - 4f_1 \\ f_3 &= f_3 - f_1 \end{aligned}}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 4-4(1) & -2-4(0) & 1-4(-2) \\ 1-1 & 2-0 & -10-(-2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0-4(1) & 1-4(0) & 0-4(0) \\ 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{matrix}\right]$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 4-4 & -2-0 & 1+8 \\ 1-1 & 2-0 & -10+2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0-4 & 1-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{matrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 = f_1 \\ f_2 = -\frac{1}{2} f_2 \\ f_3 = f_3 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} * 0 & -\frac{1}{2} * -2 & -\frac{1}{2} * 9 & -\frac{1}{2} * -4 & -\frac{1}{2} * 1 & -\frac{1}{2} * 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -0/2 & 2/2 & -9/2 & 4/2 & -1/2 & -0/2 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo (por encima ya es cero) del **1** obtenido:

  - ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = f_3 - 2f_2 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0-2(0) & 2-2(1) & -8-2(-9/2) & -1-2(2) & 0-2(-1/2) & 1-2(0) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0-0 & 2-2 & -8+9 & -1-4 & 0+1 & 1-0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como ya se obtuvo el **1** de la entrada a_{33}, Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo (por encima ya es cero) del **1** obtenido:

- ✓ **CONDICIÓN**:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 = f_1 + 2f_3 \\ f_2 = \frac{9}{2}f_3 \\ f_3 = f_3 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1+2(0) & 0+2(0) & -2+2(1) & 1+2(-5) & 0+2(1) & 0+2(1) \\ 0+9/2*0 & 1+9/2*0 & -9/2+9/2*1 & 2+9/2*-5 & -1/2+9/2*1 & 0+9/2*1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 & -2+2 & 1-10 & 0+2 & 0+2 \\ 0+0 & 1+0 & -9/2+9/2 & 2-45/2 & -1/2+9/2 & 0+9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -41/2 & 4 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. La matriz inversa:

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -41/2 & 4 & 9/2 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. Realice la prueba efectuando la operación indicada, confronte el resultado con su tutor:

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -41/2 & 4 & 9/2 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ACTIVIDAD

1. Demuestre que, dada la matriz:

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, su inversa es $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Nota: Al desarrollar el procedimiento (tome como modelo los ejercicios desarrollados) debe justificar cada uno de los pasos realizados, confronte con su tutor el trabajo realizado y demuestre además que:

$$\boldsymbol{AA^{-1} = I}$$

2. Encuentre la inversa de la siguiente matriz siguiendo los procedimientos vistos y comprobando que : $\boldsymbol{AA^{-1} = I}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{47}{40} & -\frac{19}{10} & \frac{9}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{73}{40} & \frac{31}{10} & -\frac{11}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{40} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES SOLUCIONADOS CON LA MATRIZ INVERSA

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que: La forma matricial de un sistema de ecuaciones es:

$$AX = B \text{ Igualdad 1}$$

Si la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene inversa, esta es $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Al multiplicar la **igualdad 1** por $\boldsymbol{A^{-1}}$, se tiene que:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \text{ pero } A^{-1}A = I, \text{ entonces:}$$

$$IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Por lo tanto: Para solucionar un sistema de ecuaciones lineales utilizando la inversa de la matriz de coeficientes, se debe efectuar la siguiente multiplicación de matrices:

$$X = A^{-1}B$$

EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Utilizando la matriz inversa, solucione el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Procedimiento

a. Se forma la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -10 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Se determina **la matriz aumentada** con la **matriz identidad de orden tres**:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- ✓ Se halla la inversa de la matriz de coeficientes:

Como la entrada a_{11} =**1,** Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:

CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 - f_1 \\ f_3 = f_3 - 4f_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & 2-0 & -10-(-2) & 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 4-4(1) & -2-4(0) & 1-4(-2) & 0-4(1) & 0-4(0) & 1-4(0) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & 2-0 & -10+2 & 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 4-4 & -2-0 & 1+8 & 0-4 & 0-0 & 1-0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

○

CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1 = f_1 \\ f_2 = \frac{1}{2}(f_2) \\ f_3 = f_3 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ {}^{1}\!/_{2} * 0 & {}^{1}\!/_{2} * 2 & {}^{1}\!/_{2} * -8 & {}^{1}\!/_{2} * -1 & {}^{1}\!/_{2} * 1 & {}^{1}\!/_{2} * 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ {}^{0}\!/_{2} & {}^{2}\!/_{2} & {}^{-8}\!/_{2} & {}^{-1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} & {}^{0}\!/_{2} \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -{}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo (por encima ya es cero) del **1** obtenido:

CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = f_3 + 2f_2 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -{}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -{}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} & 0 \\ 0 + 2(0) & -2 + 2(1) & 9 + 2(-4) & -4 + 2(-{}^{1}\!/_{2}) & 0 + 2({}^{1}\!/_{2}) & 1 + 2(0) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -{}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} & 0 \\ 0 + 0 & -2 + 2 & 9 - 8 & -4 - 1 & 0 + 1 & 1 + 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Como ya se obtuvo el **1** de la entrada $a_{33,}$ Se convierten en **cero** las entradas que están por encima del **1** obtenido:

CONDICIÓN

$$f_1 = f_1 + 2f_3$$
$$f_2 = f_2 + 4f_3$$
$$f_3 = f_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1+2(0) & 0+2(0) & -2+2(1) & 1+2(-5) & 0+2(1) & 0+2(1) \\ 0+4(0) & 1+4(0) & -4+4(1) & -1/2+4(-5) & 1/2+4(1) & 0+4(1) \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1+0 & 0+0 & -2+2 & 1-10 & 0+2 & 0+2 \\ 0+0 & 1+0 & -4+4 & -1/2-20 & 1/2+4 & 0+4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -41/2 & 9/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

c. Por lo tanto la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -41/2 & 9/2 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d. ACTIVIDAD: Demostrar que:

$$AA^{-1} = I_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -10 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -41/2 & 9/2 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: La realiza el estudiante y confronta el resultado con el tutor.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que: en el producto de matrices, se multiplican **las filas** de la **primera matriz** por **todas y cada una de las columnas** de la **segunda matriz.**

e. Se soluciona el sistema de ecuaciones utilizando la **matriz inversa** A^{-1} **:**

$$X = A^{-1}B$$

f.

Recuerde que **B** es la matriz correspondiente al **término independiente**., reemplazando se tiene:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -41/2 & 9/2 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Realizando el producto de matrices indicado, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -9*(1)+ & 2*(-1)+ & 2*(2) \\ -41/2*(1) & 9/2*(-1) & 4*(2) \\ -5*(1) & 1*(-1) & 1*(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -2+ & 4 \\ -41/2- & 9/2 & +8 \\ -5 & -1 & +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Igualando las respectivas entradas, se tiene la solución para el sistema:

$$x_1 = -7$$

$$x_2 = -17$$

$$x_3 = -4$$

g. Por último se debe dar la prueba de la solución del sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 - 2x_3 = 1 \rightarrow -7 - 2(-4) = 1 \rightarrow -7 + 8 = 1 \rightarrow 1 = 1} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -1 \rightarrow -7 + 2(-17) - 10(-4) = 1 \rightarrow} \\ \boldsymbol{-7 - 34 + 40 = -1 \rightarrow -1 = -1} \\ \boldsymbol{4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \rightarrow 4(-7) - 2(-17) + (-4) = 2 \rightarrow} \\ \boldsymbol{-28 + 34 - 4 = 2 \rightarrow 2 = 2} \end{cases}$$

Se obtuvieron tres identidades, por lo tanto los valores obtenidos son la solución para el sistema de ecuaciones dado.

---

2. Utilizando la matriz inversa solucione el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + y + z = -1} \\ \boldsymbol{-x + 3y - z = 4} \\ \boldsymbol{x - y + z = 0} \end{cases}$$

Procedimiento

a. Se forma la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Para ser más prácticos en el procedimiento, se intercambian la primera fila y la tercera (que empieza por 1, pero se puede proceder con el 2 en esta salida y convertirlo en 1, realizando operaciones simples), quedaría entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Se determina **la matriz aumentada** con la **matriz identidad de orden tres**:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

d. Se halla la matriz inversa:

Como la entrada $\boldsymbol{a_{11}}$ **=1,** Se convierten en **cero** las entradas que están por debajo del **1** obtenido:

CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 + f_1 \\ f_3 = f_3 - 2f_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1+1 & 3+(-1) & -1+1 & 0+1 & 1+0 & 0+0 \\ 2-2(1) & 1-2(-1) & 1-2(1) & 0-2(1) & 0-2(0) & 1-2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1+1 & 3+(-1) & -1+1 & 0+1 & 1+0 & 0+0 \\ 2-2(1) & 1-2(-1) & 1-2(1) & 0-2(1) & 0-2(0) & 1-2(0) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se convierte en **1** la entrada a_{22}:

CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1 = f_1 \\ f_2 = \frac{1}{2} f_2 \\ f_3 = f_3 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 * 0 & 1/2 * 2 & 1/2 * 0 & 1/2 * 1 & 1/2 * 1 & 1/2 * 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ {}^{0}/_{2} & {}^{2}/_{2} & {}^{0}/_{2} & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & {}^{0}/_{2} \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se convierten en **cero** las entradas que están por encima y por debajo del **1** obtenido:

CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 \\ f_3 &= f_3 - 3f_2 \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1+1 & 1+0 & 1+{}^{1}/_{2} & 0+{}^{1}/_{2} & 0+0 \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0-3(0) & 3-3(1) & -1-3(0) & -2-3({}^{1}/_{2}) & 0-3({}^{1}/_{2}) & 1-3(0) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & {}^{3}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -{}^{7}/_{2} & -{}^{3}/_{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se convierte en **1** la entrada a_{33}:

CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 \\ f_3 &= -f_3 \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & {}^{3}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -{}^{7}/_{2} & -{}^{3}/_{2} & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & {}^{3}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ (-\mathbf{1})*\mathbf{0} & (-\mathbf{1})*\mathbf{0} & (-\mathbf{1})*-\mathbf{1} & (-\mathbf{1})*-{}^{7}/_{2} & (-\mathbf{1})*-{}^{3}/_{2} & (-\mathbf{1})*\mathbf{1} \end{array}\right]$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & {}^{3}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & {}^{7}/_{2} & {}^{3}/_{2} & -\mathbf{1} \end{array}\right]$$

Se convierten en **cero** las entradas que están por encima del **1** obtenido:

CONDICIÓN

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{f_1 = f_1 - f_3} \\ \boldsymbol{f_2 = f_2} \\ \boldsymbol{f_3 = -f_3} \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & {}^{3}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & {}^{7}/_{2} & {}^{3}/_{2} & -\mathbf{1} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{1-0} & \mathbf{0-0} & \mathbf{1-1} & {}^{3}/_{2}-{}^{7}/_{2} & {}^{1}/_{2}-{}^{3}/_{2} & \mathbf{0}-(-\mathbf{1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & {}^{7}/_{2} & {}^{3}/_{2} & -\mathbf{1} \end{array}\right]$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{2} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & {}^{7}/_{2} & {}^{3}/_{2} & -\mathbf{1} \end{array}\right]$$

e. Por lo tanto la matriz inversa es:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} -\mathbf{2} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ {}^{1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & \mathbf{0} \\ {}^{7}/_{2} & {}^{3}/_{2} & -\mathbf{1} \end{array}\right]$$

f. **ACTIVIDAD**: Demostrar que:

$$AA^{-1} = I_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/2 & 3/2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: La realiza el estudiante y confronta el resultado con el tutor.

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que: en el producto de matrices, se multiplican **las filas** de la **primera matriz** por **todas y cada una de las columnas** de la **segunda matriz.**

g. Se soluciona el sistema de ecuaciones utilizando la **matriz inversa** A^{-1} **:**

$$X = A^{-1}B$$

Recuerde que **B** es la matriz correspondiente al **término independiente**, reemplazando se tiene:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/2 & 3/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/2 & 3/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 * 0 & -1 * 4 & +1 * -1 \\ 1/2 * 0 & +1/2 * 4 & +0 * -1 \\ 7/2 * 0 & +3/2 * 4 & -1 * -1 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & +2 & +0 \\ 0 & +6 & +1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

h. Igualando las respectivas entradas, se tiene la solución para el sistema:

$$x = -5$$
$$y = 2$$
$$z = 7$$

i. **ACTIVIDAD**: Realizar la prueba y confrontarla con el tutor (recuerde que debe tomar las ecuaciones originales).

---

3. **ACTIVIDAD**: Utilizando la MATRIZ INVERSA solucione el siguiente sistema y confróntelo con el tutor:

3.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Respuesta: Se debe obtener como matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -{}^{13}/_{3} & -{}^{7}/_{3} \\ -1 & {}^{5}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ -1 & {}^{2}/_{3} & {}^{2}/_{3} \end{bmatrix}$$

La solución para el sistema es:

$$x_1 = 25$$
$$x_2 = -8$$
$$x_3 = -4$$

---

4. **ACTIVIDAD**: Utilizando la MATRIZ INVERSA solucione el siguiente sistema y confróntelo con el tutor:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 5 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = 6 \end{cases}$$

La solución para el sistema es:

$$x = 1$$
$$y = -2$$
$$z = 2$$

- **MÉTODO 4: DETERMINANTES**

Concepto de Determinante: Se entiende por determinante a una notación matemática formada por una tabla cuadrada de números u otros elementos, ubicados entre dos líneas verticales, su valor se calcula siguiendo el desarrollo de ciertas normas o reglas.

Definición de Determinante: El determinante se define como una forma multilineal alternada de un cuerpo, indicando una serie de propiedades matemáticas, generalizando el concepto y haciéndolo aplicable en numerosos campos.

El concepto de Determinante, sin embargo, fue introducido para estudiar el número de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales y se puede definir como:

Una función que asocia a toda **matriz cuadrada A** un número que se llama **determinante de A**, el cual se denota por ***det A*** *o* $|A|$. Esta función tiene la propiedad que si $\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$, si y solo si $\boldsymbol{A}$ es **no singular**.

Nota: se habla de la **no-singularidad** o **inversibilidad** de una matriz cuadrada con el hecho de que su **determinante sea diferente de 0**.

- **CÁLCULO DE DETERMINANTES**

1. **DETERMINANTE DE MATRCES 2X2**

   - ✓ Para una matriz **2X2** de la forma:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{bmatrix}$$

Su determinante se obtiene como: El **producto** de las entradas de la **diagonal principal** $(\boldsymbol{i = j})$,

menos el **producto** de las entradas de la **diagonal secundaria** $(\boldsymbol{i \neq j})$, esto es:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.2.4 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

a. Calcular el determinante de la siguiente matriz de orden 2:

$$det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = (4) * (1) - (-2) * (-5) = 4 - 10 = -6$$

Esta matriz **es invertible** porque $-6 \neq 0$

---

b. Calcular el determinante de la siguiente matriz de orden 2:

$$det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = (3) * (-4) - (6) * (-2) = -12 + 12 = 0$$

Esta matriz **no es invertible** porque $\boldsymbol{el\ resultado\ es\ cero}$.

---

2. DETERMINANTE DE MATRICES 3X3:

Para una matriz **3x3** de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El valor del determinante de **A** está dado por:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Pero existen otras maneras más fáciles de encontrar dicho determinante, tales como:

a. Repitiendo, a continuación de la matriz, **las dos primeras columnas**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Figura 1

- ✓ Se efectúa cada multiplicación como se muestra en la figura 2, corresponden al producto de las entradas de las diagonales principales (de izquierda a derecha y de arriba abajo), cada uno de los productos lleva el signo **+ (más)**.

+ + +

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

+

Figura2

- ✓ Se efectúa cada multiplicación como se muestra en la figura 3, corresponden al producto de las entradas de las diagonales secundarias (de derecha a izquierda y de arriba abajo, como lo indica la flecha), cada uno de los productos lleva el signo $-$ ($\boldsymbol{menos}$).

$- \quad - \quad -$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Figura 3.

- ✓ Reuniendo en una misma gráfica la figura 2 y la figura 3, se tiene:

\- \- \-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

+ + +

Figura 4.

4.2.5 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

PROCEDIMIENTO

a. Se repiten, a continuación de la matriz, las dos primeras columnas:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & -3 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

Nota: Para mayor comprensión en el desarrollo del ejercicio, se realizarán por separado los productos de las diagonales:

- Diagonales principales (Amarillo):

[(3)*(0)*(-3)] + [(-3)*(-5)*(1)] + [(-2)*(5)*(-1)]= (-9) + (15) + (10)=16

- Diagonales secundarias (verde):

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & -3 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

[(-2)*(0)*(1)] + [(3)*(-5)*(-1)] + [(-3)*(5)*(-3)]= (0) + (15) + (45)=60

b. Se calcula el determinante:

$\det A = \mathit{Suma\ de\ productos\ diagonal\ principal} - \mathit{Suma\ de\ productos\ diagonal\ secundaria}$

Reemplazando por los valores obtenidos, se tiene:

$$\mathbf{\det A = 16 - 60 \rightarrow \det A = -44}$$

2. Obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

PROCEDIMIENTO

c. Se repiten, a continuación de la matriz, las dos primeras columnas:

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 6 \\ 3 & -4 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 6 \\ 3 & -4 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

Nota: Para mayor comprensión en el desarrollo del ejercicio, se realizarán por separado los productos de las diagonales:

- Diagonales principales (Amarillo):

[(-1)*(-4)*(-2)] + [(6)*(-5)*(1)] + [(-5)*(3)*(4)]=

(-8) + (-30) + (-60)=-8-30-60= -98

- Diagonales secundarias (verde):

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 6 \\ 3 & -4 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

[(-5)*(-4)*(1)] + [(-1)*(-5)*(4)] + [(6)*3)*(-2)]= (20) + (20) + (-36)=

20+20-36= -4

d. Se calcula el determinante:

$$\det A = \textit{Suma de productos diagonal principal} - \textit{Suma de productos diagonal secundaria}$$

Reemplazando por los valores obtenidos, se tiene:

$$\det A = -98 - (-4) \rightarrow det\ A = -98 + 4 \rightarrow \det A = -94$$

3. Obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Nota: Se realizará el ejercicio número **2**, pero en vez de repetir las dos primeras columnas hacia la derecha, se repetirán las **dos primeras filas** hacia **abajo**, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- Se trazan las **diagonales principales** y se halla su respectivo valor:

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- Diagonales principales (Amarillo):

[(-1)*(-4)*(-2)] + [(3)*(4)*(-5)] + [(1)*(6)*(-5)]=

(-8) + (-60) + (-30)=-8-60-30= -98

- Se trazan las **diagonales secundarias** y se halla su respectivo valor:

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

[(-5)*(-4)*(1)] + [(-5)*(4)*(-1)] + [(-2)*(6)*(3)]= (20) + (20) + (-36)=

20+20-36= -4

$$\det A = \textit{Suma de productos diagonal principal} - \textit{Suma de productos diagonal secundaria}$$

Reemplazando por los valores obtenidos, se tiene:

$$\det A = -98 - (-4) \rightarrow det\, A = -98 + 4 \rightarrow \det A = -94$$

Nota: El resultado obtenido es el mismo, por lo tanto cualquiera de los métodos es válido.

ACTIVIDAD: Dadas las siguientes matrices, calcule el respectivo determinante utilizando los métodos vistos.

Nota: En el primer ejercicio y en el segundo utilice los dos métodos y demuestre que se obtiene el mismo resultado, confronte los resultados con el tutor.

$$1.\, A = \begin{bmatrix} -10 & 60 & -15 \\ 13 & 0 & -8 \\ 12 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2.\, A = \begin{bmatrix} -11 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3.\, A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.\, A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. DETERMINANTE DE MATRICES $n \times n$

- **DESARROLLO POR COFACTORES**

Dada una matriz cuadrada A de orden $n \times n$

Se define LA MATRIZ MENOR de la forma A_{ij} Como una matriz de orden

$n - 1 \times n - 1$ y resulta de eliminar en la matriz A la **fila i** y la **columna j**.

4.2.6 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Para la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -11 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Obtenga las matrices menores: $\boldsymbol{A_{22}}$ $_{y}$ $\boldsymbol{A_{31}}$

Procedimiento

$\boldsymbol{a.A_{22}}$**:** Para obtener **la Matriz Menor** se elimina **la <u>segunda fila</u>** y **la <u>segunda columna</u>** en la matriz **A,** esto es:

Si:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -11 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A_{22}} = \begin{bmatrix} -11 & -2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{b.A_{31}}$: Para obtener **la Matriz Menor** se elimina **la <u>tercera fila</u>** y **la <u>primera columna</u>** en la matriz **A,** esto es:

Si:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -11 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A_{31}} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

---

2. Dada la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & -9 \\ -2 & 15 & -6 & 7 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtenga las matrices menores: $\boldsymbol{A_{21}}$, $\boldsymbol{A_{43}}$, $\boldsymbol{A_{42}}$, $\boldsymbol{A_{13}}$, $\boldsymbol{A_{34}}$

Procedimiento

$\boldsymbol{a.A_{21}}$**:** Para obtener **la Matriz Menor** se elimina **la <u>segunda fila</u>** y **la <u>primera columna</u>** en la matriz **A,** esto es:

Si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & -9 \\ -2 & 15 & -6 & 7 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 15 & -6 & 7 \\ 10 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

$b. A_{43}$: Para obtener **la Matriz Menor** se elimina **la <u>cuarta fila</u>** y **la <u>tercera columna</u>** en la matriz **A,** esto es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & -9 \\ -2 & 15 & -6 & 7 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & -9 \\ -2 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

$c. A_{42}$: Para obtener **la Matriz Menor** se elimina **la <u>cuarta fila</u>** y **la <u>segunda columna</u>** en la matriz **A,** esto es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & -9 \\ -2 & 15 & -6 & 7 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A_{34} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & -9 \\ -2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$d. A_{13}$: Para obtener **la Matriz Menor** se elimina **la <u>primera fila</u>** y **la <u>tercera columna</u>** en la matriz **A,** esto es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & -9 \\ -2 & 15 & -6 & 7 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A_{34} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -9 \\ -2 & 15 & 7 \\ 0 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$e. A_{34}$: Para obtener **la Matriz Menor** se elimina **<u>la tercera fila</u>** y **la <u>cuarta columna</u>** en la matriz **A,** esto es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & -9 \\ -2 & 15 & -6 & 7 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

NOTAS:

1. ***EL MENOR***: $|M_{i\,j}|$

<u>El menor</u> $|M_{i\,j}|$ es el determinante de la matriz menor $A_{i\,j}$

2. *COFACTOR*: $C_{i\,j}$

<u>El COFACTOR</u> $C_{i\,j}$ es un número que se asocia a cada entrada de una matriz cuadrada **A.**

Cálculo de Cofactores:

Para calcular el cofactor se utiliza la siguiente forma:

$$C_{i\,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i\,j}$$

Nota: La única diferencia entre un menor y un cofactor es el factor: $(-1)^{i+j}$

4.2.7 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontrar los siguientes cofactores:

a. C_{23}

Procedimiento

- Se toma la matriz A y se busca su menor de acuerdo a la indicación dada:

En este caso se elimina la segunda fila y la tercera columna:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Se utiliza la forma:
  $C_{i\,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i\,j}$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^5 * [(3)*(2)-(5)*(2)] = -1*(6-10) \rightarrow (-1)*(-4) = 4$$

b. C_{11}

Procedimiento

- Se toma la matriz A y se busca su menor de acuerdo a la indicación dada:

En este caso se elimina la segunda fila y la tercera columna:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Se utiliza la forma:
  $C_{i\,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i\,j}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^2 * [(0)*(3)-(8)*(2)] = 1*(0-16)$$

$\rightarrow 1*(-16) = -16$

---

2. Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -4 & 3 & 8 \\ 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Determine los siguientes cofactores: C_{12}, C_{33}

a. C_{12}

Procedimiento

- Se toma la matriz A y se busca su menor de acuerdo a la indicación dada:

En este caso se elimina la primera fila y la segunda columna:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -4 & 3 & 8 \\ 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

- Se utiliza la forma:
  $\boldsymbol{C_{i\,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i\,j}}$

$$\boldsymbol{C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = (-1)^3 * \; [(-4)*(-7)-(8)*(0)] = -1*(28-0) \rightarrow (-1)*(28) = 28}$$

$\boldsymbol{b.\ C_{33}}$

Procedimiento

- Se toma la matriz A y se busca su menor de acuerdo a la indicación dada:

En este caso se elimina la tercera fila y la tercera columna:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -4 & 3 & 8 \\ 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

- Se utiliza la forma:
  $\boldsymbol{C_{i\,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i\,j}}$

$$\boldsymbol{C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^6 * \; [(-1)*(3)-(2)*(-4)] = 1*(-3+8) \rightarrow 1*(5) = 5}$$

- **CÁLCULO DE DETERMINANTES DE MATRICES $\boldsymbol{n \times n}$**

  - **Cálculo de determinantes por expansión por cofactores**:

Para encontrar el determinante de cualquier matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden $\boldsymbol{n}$, se selecciona cualquier **Fila** (o **columna**) de $\boldsymbol{A}$ y se **multiplica** cada **entrada** de la **fila** (o **columna**) por su **cofactor**. La suma de estos productos será el determinante de $\boldsymbol{A}$, llamado **determinante de orden $\boldsymbol{n}$.**

4.2.8 EJERCICIOS DE APRENDIZAJE

1. Encuentre el determinante de:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Ampliando las dos primeras columnas (Recuerde que también puede ampliar las dos primeras filas).
b. Utilizando cofactores en la primera fila.
c. Utilizando cofactores en la segunda columna.

Procedimiento

a. Ampliando las **dos primeras columnas**:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

PISTAS DE APRENDIZAJE

Traer a la memoria:

Recuerde que:

$$\det A = \textit{Suma de productos diagonal principal} - \textit{Suma de productos diagonal secundaria}$$

Suma de productos diagonal principal

[(2)*(0)*(1)] + [(-1)*(-5)*(2)] + [(3)*(3)*(1)]=
[0+ 10+ 9]= 19

Suma de productos diagonal secundaria

[(3)*(0)*(2)] + [(2)*(-5)*(1)] + [(-1)*(3)*(1)]= (0) + (-10) + (-3)=

0-10-3=-13

$$\det A = \textit{Suma de productos diagonal principal} - \textit{Suma de productos diagonal secundaria}$$

Reemplazando por los valores obtenidos, se tiene:

$$\det A = 19 - (-13) \rightarrow det\ A = 19 + 13 \rightarrow \det A = 32$$

b. Utilizando **cofactores** en la **primera fila**: $[2 \quad -1 \quad 3]$

$$\boxed{det\ A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}}$$

Ecuación 1

Entonces:

- Se elimina la **primera fila** y la **primera columna**:

$$a_{11}c_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = 2(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$a_{11}c_{11} = 2 * 1\,[(0)*(1) - (-5)*(1)] = 2(0+5) = 2*5 = 10$$

- Se elimina la **primera fila** y la **segunda columna**:

$$a_{12}c_{12} = a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$a_{12}c_{12} = (-1)*(-1)\,[(3)*(1) - (-5)*(2)] = 1(3+10) = 1*13 = 13$$

- Se elimina la **primera fila** y la **tercera columna**:

$$a_{13}c_{13} = a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} = 3(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$a_{13}c_{13} = (3)*(1)\,[(3)*(1) - (0)*(2)] = 3(3+0) = 3*3 = 9$$

Reemplazando en la **ecuación 1:**

$$det\ A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

$$det\ A = 10 + 13 + 9 \rightarrow \ det\ A = 32$$

---

c. Utilizando **cofactores** en la **segunda columna:** $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$det\ A = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32}$$

Ecuación 2

Entonces:

- Se elimina la **primera fila** y la **segunda columna**:

$$a_{12}c_{12} = a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = (-1)*(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$\boldsymbol{a_{12}c_{12} = 1\,[(3)*(1)-(-5)*(2)] = 1(3+10) = 1*13 = 13}$

- Se elimina la **segunda fila** y la **segunda columna**:

$$\boldsymbol{a_{22}c_{22} = a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} = (0)(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow}$$

$\boldsymbol{a_{22}c_{22} = 0}$

- Se elimina la **tercera fila** y la **segunda columna**:

$$\boldsymbol{a_{32}c_{32} = a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} = 1(-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow}$$

$\boldsymbol{a_{32}c_{32} = (1)*(-1)[(2)*(-5)-(3)*(3)] = -1*(-10-9) = -1*(-19) = 19}$

Reemplazando en la **ecuación2:**

$\boldsymbol{det\ A = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32}}$

$\boldsymbol{det\ A = 13 + 0 + 19 \rightarrow\ \ det\ A = 32}$

---

2. Utilizando los cofactores de la segunda fila, obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det = -3(-1)^{2+1}\left[-1(-3)-2*3\right]+1(-1)^{2+2}\left[12(-3)-(-10)(3)\right]+(-1)(-1)^{2+3}\left[12*2-(-10)(-1)\right] = -1$$

Ejemplo3:

Utilizando cofactores, calcule el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Como en la primera columna hay dos entradas iguales a cero, vamos a calcular el determinante utilizando cofactores en la primera columna.

$$\det A = 2(-1)^{1+2}\left[1*3-(-1)1\right] = -8$$

Ejemplo4

Calcule el determinante de la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Vamos a utilizar cofactores en el primer renglón

$$\det B = 2(-1)^{1+1} * \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 1(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= 2*\left[-(3*1*2+2*3*1)\right] = -24 + (-)(1) = -25$$

Ejemplo5:

Se deja como tarea que el estudiante calcule el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ -6 & 4 & 8 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Debe obtener la respuesta:

$$R: \det A = -1162$$

Ejemplo5:

Determine el valor de x, de tal manera que el determinante de la matriz A sea igual a -105.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2 & x & 0 \\ -8 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$A\begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2 & x & 0 \\ -8 & 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 5 & 4 \\ 2 & x \\ -8 & 6 \end{matrix}$$

$$A = \det A = 5(x)(3) + 4(0)(-8) + (-3)(2)(6) - (-8)(x)(-3) - 6(0)(5) - 3(2)(4) = -105$$

$$15x - 36 - 24x - 24 = -105 \Rightarrow -9x - 50 = -105 \Rightarrow -9x = -105 + 50$$

$$\Rightarrow -9x = -45 \Rightarrow x = \frac{-45}{-9} \Rightarrow x = 5$$

Ejercicios propuestos para ser solucionados por los estudiantes:

1. Determine el valor de x, de tal manera que el determinante de la matriz sea igual a -1

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 3 & x \\ 7 & 2 & -5 \\ 5 & 9 & -x \end{bmatrix}$$ R: x = 4

2. Determine el valor de x, de tal manera que el determinante de la matriz sea igual a -141

$$A = \begin{bmatrix} x & 6 & 5 \\ 4 & x^2 & 2 \\ 6 & x & 5 \end{bmatrix} R: x = 3$$

3. Determine el valor de x, de tal manera que el determinante de la matriz sea igual a 22

$$A = \begin{bmatrix} x-3 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & x-2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} R: x = 8$$

MATRIZ ADJUNTA:

Para una matriz A de n X n se define la matriz adjunta como la transpuesta de la matriz de cofactores.

TEOREMA:

Si A es una matriz de n X n y $\det A \neq 0$, entonces A^{-1} existe y se obtiene como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$$

Ejemplo:

Utilizando la matriz adjunta, encuentre la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Este ejercicio se deja propuesto para que sea solucionado por los estudiantes.

Se debe llegar a la siguiente respuesta:

$\det A = -26$

La matriz de cofactores es:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -10 & -9 & -7 \\ 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

La matriz adjunta es:

$$adj = \begin{bmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 6 & -9 & 8 \\ -4 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

La inversa es:

$$A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 6 & -9 & 8 \\ -4 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

Propiedades de los determinantes:

1. Si I es la matriz identidad, entonces $\det I = 1$.
2. La matriz identidad de 2X2 es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det I = 1(1) - 0(0) = 1$
3. Si B se obtiene a partir de A intercambiando dos renglones de A, entonces $\det B = -\det A$.

4. Si se obtiene B a partir de A sumando un múltiplo de un renglón de A a otro renglón, entonces $\det B = \det A$.
5. Si se obtiene B a partir de A multiplicando un renglón de A por un número m, entonces $\det B = m \det A$.
6. Si A es una matriz diagonal, $\det A = a_{11}, a_{22}, ...a_{mn}$
7. Si A una matriz triangular, superior o inferior, $\det A = a_{11}, a_{22}, ...a_{nn}$
8. Si dos renglones de A son iguales, entonces det A = 0.
9. Si A tiene un renglón de ceros, entonces det A = 0.
10. Una matriz cuadrada A es invertible si, y sólo si $\det A \neq 0$
11. Si A y B son matrices de n X n, entonces det (AB) = det A * det B.
12. En términos generales: $\det(A+B) \neq \det A + \det B$
13. Si se obtiene B a partir de A sumando un múltiplo de una columna de A a otra, entonces det B = det A.
14. Si se obtiene B a partir de A multiplicando una columna de A por un número *m*, entonces det B = m det A.
15. Si se obtiene B a partir de A intercambiando dos columnas, entonces det B = - det A.
16. Si A es una matriz de n X n y A^T es su transpuesta, entonces
17. det A = det A^T.

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES UTILIZANDO DETERMINANTES

REGLA DE CRAMER

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & ... + & a_{1n}x_n = & c_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & ... + & a_{2n}x_n = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & ... + & a_{nn}x_n & c_n \end{cases}$$

Si el det A, matriz de coeficientes, es diferente de cero, el sistema tiene única solución que se obtiene como:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}, ...x_n = \frac{D_n}{D}$$

Dónde:

D: Es el determinante de la matriz de coeficientes.

D_1 : Es el determinante de la matriz que resulta de intercambiar en la matriz de coeficientes las entradas de la primera columna por las entradas de la matriz B ó matriz del término independiente.

D_2 : Es el determinante de la matriz que resulta de intercambiar en la matriz de coeficientes las entradas de la segunda columna por las entradas de la matriz B o matriz del término independiente.

D_3 : Es el determinante de la matriz que resulta de intercambiar en la matriz de coeficientes las entradas de la tercera columna por las entradas de la matriz B o matriz del término independiente.

D_n : Es el determinante de la matriz que resulta de intercambiar en la matriz de coeficientes las entradas de la n ésima columna por las entradas de la matriz B ó matriz del término independiente.

Ejemplo1:

Utilizando determinantes, resuelva el sistema:

$$\begin{aligned} 2x-5y+4z&=13\\ 3x+2y+3z&=30\\ 4x+6y-5z&=-4 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Para obtener el determinante D utilizamos la matriz de coeficientes:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$D=2(2)(-5)+(-5)(3)(4)+4(3)(6)-4(2)(4)-6(3)(2)-(-5)(3)(-5)$$

$$D=-151$$

Para calcular el determinante D_1 cambiamos las entradas de la primera columna en la matriz de coeficientes por las entradas del término independiente de cada ecuación:

$$D_1=\begin{vmatrix} 13 & -5 & 4\\ 30 & 2 & 3\\ -4 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$D=13(2)(-5)+(-5)(3)(-4)+4(30)(6)-(-4)(2)(4)-6(3)(13)-(-5)(30)(-5)$$

$$D_1=-302$$

Para calcular el determinante D_2 cambiamos las entradas de la segunda columna en la matriz de coeficientes por las entradas del término independiente de cada ecuación:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ 3 & 30 & 3 \\ 4 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$D = 2(30)(-5) + (13)(3)(4) + 4(3)(-4) - 4(30)(4) - (-4)(3)(2) - (13)(3)(-5)$$

$$D_2 = -453$$

Para calcular el determinante D_3 cambiamos las entradas de la tercera columna en la matriz de coeficientes por las entradas del término independiente de cada ecuación:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 13 \\ 3 & 2 & 30 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = 2(2)(-4) + (-5)(30)(4) + 13(3)(6) - 4(2)(13) - 6(30)(2) - (-4)(3)(-5)$$

$$D_3 = -906$$

La solución del sistema es:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-302}{-151} = 2,\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{-453}{-151} = 3 \wedge z = \frac{D_3}{D} = \frac{-906}{-151} = 6$$

Prueba:

$$\begin{array}{lcl} 2x - 5y + 4z = 13 & & 2(2) - 5(3) + 4(6) = 13 \Rightarrow 4 - 15 + 24 = 13 \Rightarrow 13 = 13 \\ 3x + 2y + 3z = 30 & \Rightarrow & 3(2) + 2(3) + 3(6) = 30 \Rightarrow 6 + 6 + 18 = 30 \Rightarrow 30 = 30 \\ 4x + 6y - 5z = -4 & & 4(2) + 6(3) - 5(6) = -4 \Rightarrow 8 + 18 - 30 = -4 \Rightarrow -4 = -4 \end{array}$$

La solución del sistema es:

$$x = 2,\ y = 3 \wedge z = 6$$

Ejemplo2:

Aplicando la regla de Cramer, resuelva el sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 2z = 2 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

El estudiante debe comprobar que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = D = -8$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -16$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Entonces la solución del sistema es:

$$x = \frac{D_1}{D},\ y = \frac{D_2}{D},\ Z = \frac{D_3}{D}$$

$$x = \frac{4}{-8} = -1/2,\ y = \frac{-16}{-8} = 2,\ z = \frac{8}{-8} = -1$$

El estudiante debe dar la prueba.

APLICACIONES: PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN PLANTEANDO SISTEMAS DE ECAUCIONES LINEALES

Debido a la ilimitada variedad de problemas es difícil establecer reglas específicas para encontrar soluciones. Sin embargo las siguientes sugerencias pueden ayudarte:

1. Lee el problema cuidadosamente varias veces y piensa en los datos que te dan y en las cantidades desconocidas que debes encontrar.
2. Gráfica si es posible, así visualizarás mejor.

3. Asigna letras a las cantidades desconocidas.
4. Relaciona los datos y las cantidades desconocidas.
5. Teniendo en las condiciones del problema escribe ecuaciones.
6. Resuelve las ecuaciones por los métodos que consideres más apropiados.
7. Verifica si la solución obtenida concuerda con las condiciones dadas.

Observación:

No importa mucho la naturaleza del problema, pero si que aprendas a razonar y puedas resolverlo analíticamente.

En los problemas continuación, sólo vamos a plantear el sistema de ecuaciones, dejo como ejercicio para, los estudiantes, el solucionar cada sistema planteado utilizando el método que desee.

Ejemplo 1:

Cuando Beth se graduó en la universidad, había completado 40 cursos, en los cuales recibió grados de A, B y C. Su PPG final (puntaje promedio de grado) fue de 3.125. Su PPG en solo los cursos que recibió los grados de A y B fue de 3.8. Se supone que los cursos A, B y C valen 4 puntos, 3 puntos y 2 puntos, respectivamente. Determine el número de grados A, B y C que recibió.

SOLUCIÓN.

Tenemos que los cursos tipo A corresponden a las materias de formación profesional.

Los cursos tipo B corresponden a la materias de formación matemática.

Los cursos tipo C corresponden a las materias de formación humanística.

Sea x cantidad de materias de formación Profesional recibidas

Sea y cantidad de materias de Formación Matemática recibidas

Sea z cantidad de materias de formación humanística recibidas

Se debe plantear las siguientes ecuaciones:

Para la cantidad de materias vistas:

$$x + y + z = 40 \; Cantidad\, de\, cursos,\; ec1$$

Para su PPG final (puntaje promedio de grado)

$$\frac{4x+3y+2z}{40} = 3.125 \;\; \mathrm{Pr}omedio\ de\ grado \Rightarrow 4x+3y+2z = 40*3.125 \Rightarrow 4x+3y+2z = 125\ ec2$$

Total de cursos donde recibió las materias de formación Profesional y de formación Matemática es x + y, está dado por: $x+y=40-z$

El promedio de estos cursos está dado por:

$$\frac{4x+3y}{40-z}=3.8 \Rightarrow 4x+3y=3.8(40-z) \Rightarrow 4x+3y+3.8z=3.8*40 \Rightarrow 4x+3y+3.8z=152ec3$$

Se debe solucionar el sistema:

$$x+y+z=40 \ \ ec1$$

$$4x+3y+2z=125 \ \ ec2$$

$$4x+3y+3.8z=152ec3$$

R: 20, 5 y 15

Ejemplo2:

Encuentre una parábola de la forma: $y=ax^2+bx+c$ que pase por los puntos $(1,\ 3),\ (7,\ 4) \wedge (-3,\ 5)$.

SOLUCIÓN

Se debe remplazar cada punto en la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+c$

$(1,\ 3) \Rightarrow x=1 \wedge y=3$

Remplazando tenemos:

$3=a(1)^2+b(1)+c \Rightarrow a+b+c=3 \ Ecuación\ 1$

Remplazando tenemos:

$(7,\ 4) \Rightarrow x=7 \wedge y=4$

$4=a(7)^2+b(7)+c \Rightarrow 49a+7b+c=4 \ Ecuación\ 2$

Remplazando tenemos:

$(-3,\ 5) \Rightarrow x=-3 \wedge y=5$

$5=a(-3)^2+b(-3)+c \Rightarrow 9a-3b+c=5 \ Ecuación\ 3$

Se debe plantear y resolver el sistema:

$$a+b+c=3$$
$$49a+7b+c=4$$
$$9a-3b+c=5$$

R: $a=\frac{1}{15},\ b=-\frac{11}{30} \wedge c=\frac{33}{10}$

Ejemplo2:

En una fábrica se producen 4 artículos A, B, C, y D.

Si los costos de producción de los cuatro artículos en enero fueron US$ 5675 y se produjeron 30 artículos del producto A, 15 de B, 70 de C y 25 del producto D.

Los costos en febrero fueron de US$ 1875 y se produjeron respectivamente 10, 10, 5 y 40 artículos de cada producto.

Para marzo los costos de producción fueron de US$ 7775, con producciones de 95, 0, 45 y 50.

Para abril los costos son de US$ 5100, con producciones de: 1, 80, 50 y 0.

Si los costos de producción de cada artículo permanecieron constantes durante estos cuatro meses, determine el costo de producir una unidad de cada artículo.

Se debe plantear y resolver el sistema:

$$30A+15B+70C+25D=5675$$
$$10A+10B+5C+40D=1875$$
$$95A+45C+50D=7775$$
$$A+80B+50C=5100$$

R: US$ 50, US$ 35, US$ 45 y US$ 20

Ejemplo4:

Entre A, B y C tienen 140 Bolívares. C tiene la mitad de lo que tiene A. A tiene 10 más que B. ¿Cuánto tiene cada uno?

SOLUCIÓN

Si x_1 es la cantidad de dinero que tiene A, x_2 es la cantidad de dinero que tiene B y x_3 es la cantidad de dinero que tiene C.

Se debe plantear el siguiente sistema:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 140\,000$$

$$\text{C tiene la mitad de lo que tiene A.} \quad x_3 = \frac{1}{2}x_1 \rightarrow 2x_3 = x_1 \rightarrow x_1 - 2x_3 = 0$$

A tiene $ 10000 más que B. $x_1 = x_2 + 10\,000 \rightarrow x_1 - x_2 = 10\,000$

El sistema de ecuaciones que se debe plantear para resolver este problema es:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 140000$$

$$x_1 - x_2 \qquad = 10000$$

$$x_1 \qquad - 2x_3 = 0$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 140\,000 & 1 & 1 \\ 10\,000 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 300\,000$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 140\,000 & 1 \\ 1 & 10\,000 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 250\,000$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 140\,000 \\ 1 & -1 & 10\,000 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 150\,000$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{300\,000}{5} = 60\,000$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{250\,000}{5} = 50\,000$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{150000}{5} = 30000$$

Ejemplo5:

Hay una única parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(-2, -20), (3, -10) \wedge (5, -62)$. Encuentre dicha parábola.

SOLUCIÓN

$$x = -2, \qquad y = -20$$

$$-20 = a(-2)^2 + b(-2) + c \rightarrow 4a - 2b + c = -20 \ \ ecuación\ 1$$

$$x = 3,\ y = -10$$

$$-10 = a(3)^2 + b(3) + c \rightarrow 9a + 3b + c = -10\ ecuación\ 2$$

$$x = 5\ \ y = -62$$

$$-62 = a(5)^2 + b(5) + c \rightarrow 25a + 5b + c = -62\ ecuación\ 3$$

Para determinar la parábola se debe plantear y solucionar el sistema de ecuaciones:

$$4a - 2b + c = -20$$

$$9a + 3b + c = -10$$

$$25a + 5b + c = -62$$

Utilizando determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -70$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -20 & -2 & 1 \\ -10 & 3 & 1 \\ -62 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 280$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -20 & 1 \\ 9 & -10 & 1 \\ 25 & -62 & 1 \end{vmatrix} = -420$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -20 \\ 9 & 3 & -10 \\ 25 & 5 & -62 \end{vmatrix} = -560$$

$$a = \frac{D_1}{D} = \frac{280}{-70} = -4 \qquad b = \frac{D_2}{D} = \frac{-420}{-70} = 6 \qquad c = \frac{D_3}{D} = \frac{-560}{-70} = 8$$

La parábola es: $y = -4x^2 + 6x + 8$

Ejemplo6:

Una fábrica dispone de tres máquinas para producir tres artículos A, B y C. Para producir una unidad del artículo A se requiere utilizar la máquina I dos horas, la máquina II una hora 30 minutos, la máquina III 30 minutos. Para producir una unidad del artículo B se necesita Hora y media, 3 horas y 4 horas en cada máquina respectivamente.

Para una unidad del artículo C se requiere el utilizar las maquinas I, II y III; 2 horas, 30 minutos y 3 horas respectivamente.

Se sabe que la máquina I se encuentra disponible al mes 122 horas y 30 minutos, la máquina II 100 horas y la máquina III está disponible 135 horas.

SOLUCIÓN

Sea: x_1 es el número de unidades a producir del artículo A, x_2 es el número de unidades a producir del artículo B y x_3 es el número de unidades a producir del artículo C.

Para determinar el número de unidades de cada artículo a fabricar cada mes de tal manera que las máquinas sean utilizadas totalmente.

El sistema de ecuaciones que se debe plantear es:

$$2x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 = 122.5$$
$$1.5x_1 + 3x_2 + 0.5x_3 = 100$$
$$0.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 135$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & 3 & 0.5 \\ 0.5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 16.625$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 122.5 & 1.5 & 2 \\ 100 & 3 & 0.5 \\ 135 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 498.75$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 122.5 & 2 \\ 1.5 & 100 & 0.5 \\ 0.5 & 135 & 3 \end{vmatrix} = 249.375$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1.5 & 122.5 \\ 1.5 & 3 & 100 \\ 0.5 & 4 & 135 \end{vmatrix} = 332.5$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{498.75}{16.625} = 30 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{249.375}{16.625} = 15 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{332.5}{16.625} = 20$$

4.2.9 EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Escriba la forma matricial del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{gathered}
4x_1 - 7x_2 + x_5 - 7x_6 + 9x_7 = 8 \\
3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 45 \\
x_3 - 6x_4 + 4x_5 + x_6 - 34x_7 = 22 \\
-7x_1 + 5x_3 + 16x_4 - x_7 = 2 \\
6x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 23x_6 + x_7 = 50
\end{gathered}
$$

Solucione el siguiente sistema de ecuaciones utilizando dos métodos diferentes:

$$
\begin{gathered}
3x + 6y - 2z + w = 34 \\
6x - 5y + z + 5w = -12 \\
9x + 7y + 8z + 3w = 25 \\
6y - 11z + 4w = 100
\end{gathered}
$$

Solucione el siguiente problema utilizando planteando sistemas de ecuaciones lineales y utilizando cualquiera de los métodos matriciales vistos.

Una fábrica produce 4 artículos A, B, C y D.

La producción de la fábrica en el mes de diciembre de 30 unidades del artículo A, 10 del artículo B, 60 del artículo C y 45 unidades del artículo D. En enero, la producción fue de 50, 15, 35 y 5 respectivamente. En febrero la producción fue de 100 artículos de A, 30 artículos de B, ninguno del artículo C y 50 unidades del artículo D. En marzo la producción fue de 5 unidades de A, 20 de B, la cantidad producida de C fue el doble de la de B y 50 unidades del artículo D.

Si los costos de producción en cada mes fueron de: Diciembre $ 230000, enero de $ 210000, febrero de $ 355000 y en marzo de $ 190000. Determine el costo de producir una unidad de cada artículo.

Actividad.

Para solucionar los siguientes problemas utilice las técnicas matriciales vistas en clase.

$$
\begin{cases}
6x_1 - 7x_2 - x_3 = 17 \\
8x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 14 \\
12x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 15 \\
-2x_1 + 15x_2 + 4x_3 = 30 \\
-3x_1 + 8x_2 - 6x_3 = -48
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 - 5x_3 = 67 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 118 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 4z - 5w = 28 \\ x - y - 2z + 3w = 13 \\ x - 5y + 5z - 2w = -11 \\ 2x + 7y + 4z - 6w = -32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 7y + 6z - 3w = 30 \\ x - 18y - 4z - 5w = 56 \\ -3x - 2y + 3w = -96 \\ 4x - 7y + 31z - 10w = 220 \end{cases}$$

Una concesión del gobierno de US $ 1’360000 se dividió entre 100 científicos de tres grupos de investigación A , B C. Cada científico del grupo de investigación A recibió US $ 20000, cada científico de B recibió US $ 8000 y cada científico de C recibió US $ 10000. El grupo de investigación A recibió cinco veces los fondos del grupo de investigación B. ¿Cuántos científicos pertenecen a cada grupo?

Entre A, B y C tienen 22 mil pesos. La suma de lo que tiene A con lo que tiene B menos lo que tiene C es 2 mil pesos. El doble de lo que tiene C supera en 8 mil pesos lo que tienen A y B juntos. ¿Cuánto dinero tiene cada uno? 5, 7 y 10 mil pesos.

5 kilos de azúcar, 3 de café y 4 de frijoles cuestan $ 1.18. 4 de azúcar, 5 de café y 3 de frijoles cuestan $1.45. 2 de azúcar, 1 de café y 2 de frijoles cuestan 46 cts. Halle el precio de un kilo de cada mercancía. R: 600, 2000 y 700.

Una gaseosa, 1 paquete de pan y una bolsa de mecato cuestan $ 7700. 3 gaseosas, 2 paquetes de pan y una bolsa de mecato cuestan $ 11 000. 4 gaseosas, un paquete de pan y dos bolsas de mecato cuestan $ 16 100. Determine el costo de una gaseosa, un paquete de pan y de una bolsa de mecato. R: $ 1 000, 1 300 y 5 400.

La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º, el mayor excede al menor en 35º y el menor excede en 20º a la diferencia entre el mayor y el mediano. Halle los tres ángulos. R: 80º, 55º y 45º.

La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1, 10), (-1, 12) \wedge (2, 18)$. Halle a, b y c.

Un fabricante produce tres artículos A, B y C. La utilidad por cada unidad vendida de A, B y C es uno, dos y tres dólares, respectivamente. Los costos fijos son de $ 17000 por año y los costos de producción por cada unidad son $ 4, $ 5 y $ 7, respectivamente. El año siguiente serán producidas y vendidas un total de 11000 unidades entre los tres productos y se obtendrá una utilidad de $ 25000. Si el costo total será de $ 80000, ¿Cuántas unidades de cada producto deben producirse el año siguiente? R: 2000, 4000 y 5000.

Una empresa elabora tres productos A, B y C, los cuales pueden procesarse en tres máquinas I, II y III. Una unidad de A requiere 4, 5 y 6 horas de procesamiento en las máquinas, mientras cada unidad de B requiere 3, 5 y 5 horas de procesamiento y una unidad de C requiere 2, 4 y 6 horas en la máquinas. Se dispone de las máquinas I, II y III, por 500, 800 y 1.000 horas, respectivamente, ¿cuánta unidades de cada producto puede elaborarse usando todo el tiempo disponible de las máquinas?

Un hombre tiene 110 animales entre vacas, caballos y terneros, $\frac{1}{8}$ del número de vacas más $\frac{1}{9}$ del número de caballos más $\frac{1}{5}$ del número de terneros equivalen a 15, y la suma del número de terneros con el de vacas es 65. ¿Cuántos animales de cada clase tiene?

En un triángulo la suma del ángulo mayor con el mediano es 135^0 y la suma del mediano y el menor es 110^0. Halle los ángulos.

Las edades de tres personas suman 45 años, la suma de las dos primeras equivalen al doble de la tercera. La diferencia entre la primera y la tercera equivale a un medio de la segunda. Determine la edad de cada persona. R: 20, 10, 15.

Encuentre una parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que pase por los puntos $(5, -3), (-3, 8) \wedge (1, 1)$.

Encuentre un polinomio de la forma $y = Ax^3 + Ax^2 + Bx + C$ que pase por los puntos: $(2,5), (-3,10)\ y\ (8,-2)$

Encuentre un polinomio de la forma: $y = Ax^4 + 8x^2 + Bx + C$ que pase por los puntos $(1,25), (-5,12)\ y\ (6,0)$

Encuentre el polinomio de la forma $y = 4x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 20$ que pase por los puntos $(10,-10), (5,25)\ y\ (-3,48)$ No referenciar.

Si A le da a C \$ 1, ambos quedan con lo mismo. Si B tuviera \$ 1 menos, tendría lo mismo que C. Si A tuviera \$ 5 más, tendría tanto como el doble de lo que tiene C. ¿Cuánto tienen cada uno?

SOLUCIÓN

Sean:

x_1: Cantidad de dinero que tiene A

x_2: Cantidad de dinero que tiene B

x_3: Cantidad de dinero que tiene C.

Si A le da a C \$ 1 millón, ambos tienen lo mismo.

A queda con: $x_1 - 1$

C queda con: $x_2 + 1$

La ecuación a plantear es:

$$x_1 - 1 = x_2 + 1$$

La ecuación N°1 queda:

$$x_1 - x_2 = 2$$

Si B tuviera $ 1 millón menos, tendría lo mismo que C.

La ecuación a plantear es:

$$x_2 - 1 = x_3$$

La ecuación N°2 queda:

$$x_2 - x_3 = 1$$

Si A tuviera $ 5 millones más, tendría tanto como el doble de lo que tiene C

La ecuación a plantear es:

$$x_1 + 5 = 2x_3$$

La ecuación N°3 queda:

$$x_1 - 2x_3 = -5$$

El sistema a resolver es:

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_3 = -5$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -8$$

$$x_1 = \frac{-11}{-1} = 11$$

$$x_2 = \frac{-9}{-1} = 9$$

$$x_3 = \frac{-8}{-1} = 8$$

5 UNIDAD 4 VECTORES. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

5.1.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar las técnicas que peritan manipular vectores en R^2 y R^3.

5.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar las diferentes ecuaciones de una recta en el espacio.
- Determinar la ecuación de los diferentes planos.

5.2 VECTORES EN R^2 Y R^3

5.2.1 VECTOR

Es un segmento de recta dirigido. Un vector tiene magnitud (siempre positiva) y tiene dirección (ángulo).

- **NOTACIÓN DE VECTOR:**

Se acostumbra usar el símbolo $\overrightarrow{AB}$ para denotar el vector que va del punto A (considerado punto inicial) al punto B llamado punto final.

Otra forma para denotar o simbolizar vectores es utilizando letras minúsculas en negrita como: **a, b, u, v, w, m,** etc.

- **MAGNITUD DE UN VECTOR:**

A la longitud del segmento dirigido se le llama magnitud del vector y se denota por $\left|\overrightarrow{AB}\right| \vee |u| \vee |v| \vee |w|, \, etc.$

- **VECTORES EN** lR^2

Un vector en lR^2 (en el plano) es una pareja ordenada o par ordenado de números reales y se emplea la notación $v=(a,b) \vee v = ai + bj$. Donde a y b son números reales.

Ejemplo:

$$v = (-10{,}7) = -10i + 7$$

- **VECTORES EN** lR^3

Un vector en lR^3 (en el espacio) es una tripleta ordenada de números reales, utilizamos la notación $v=(a,b,c) \vee v=ai+bj+ck$, donde a, b y c son números reales.

Ejemplo:

$$v=(12,17,-9)=12i+17j-9k$$

- **VECTOR ENTRE DOS PUNTOS:**

Sean los puntos:

$$A=(a_1,b_1,c_1) \wedge B=(a_2,b_2,c_2) \text{ en } lR^3 \vee A=(a_1,b_1) \wedge B=(a_2,b_2) \text{ en } lR^2$$

A partir de estos puntos se pueden obtener los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB}=(a_2-a_1)i+(b_2-b_1)j+(c_2-c_1) \text{ en } lR^3$$

$$\overrightarrow{AB}=(a_2-a_1)i+(b_2-b_1)j \text{ en } lR^2$$

$$\overrightarrow{BA}=(a_1-a_2)i+(b_1-b_2)j+(c_1-c_2)k=-\overrightarrow{AB} \text{ para } lR^3$$

$$\overrightarrow{BA}=(a_1-a_2)i+(b_1-b_2)j=-\overrightarrow{AB} \text{ para } lR^2$$

Ejemplo:

Dados los puntos $A=(15,-3,12) \wedge B=(17,3,10)$

Halle los siguientes vectores:

$$AB=(17-15)i+(3-(-3))j+(10-12)k=2i+6j-2k$$

$$BA=(15-17)i+(-3-3)j+(12-10)k=-2i-6j+2k$$

$$OA=(15-0)i+(-3-0)j+(12-0)k=15i-3j+12k$$

$$OB=17i+3j+10k$$

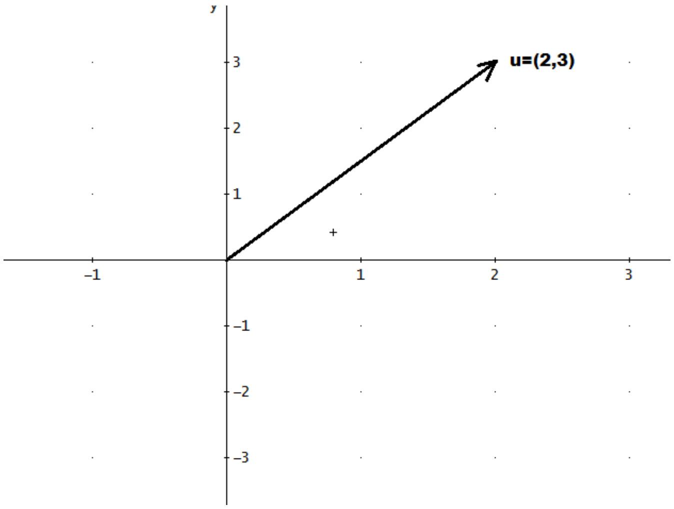
GRÁFICA DE VECTORES

Los vectores se grafican ubicando puntos en el plano cartesiano para vectores en R^2 y ubicando puntos en el espacio para vectores en R^3.

Ejemplo1:

Grafique el vector $u = (2,3))$

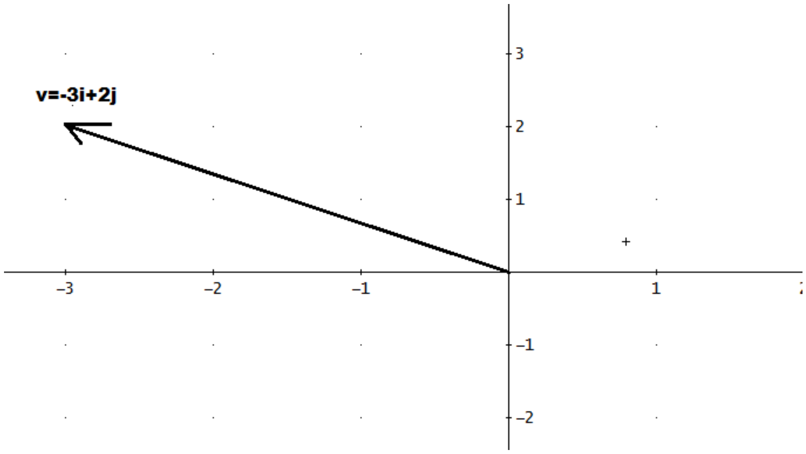
Solución: Solo se debe ubicar en el plano cartesiano el punto de coordenadas (2,3)



Ejemplo 2:

Grafique el vector $v = -3i + 2j$

La gráfica se muestra en la siguiente figura.

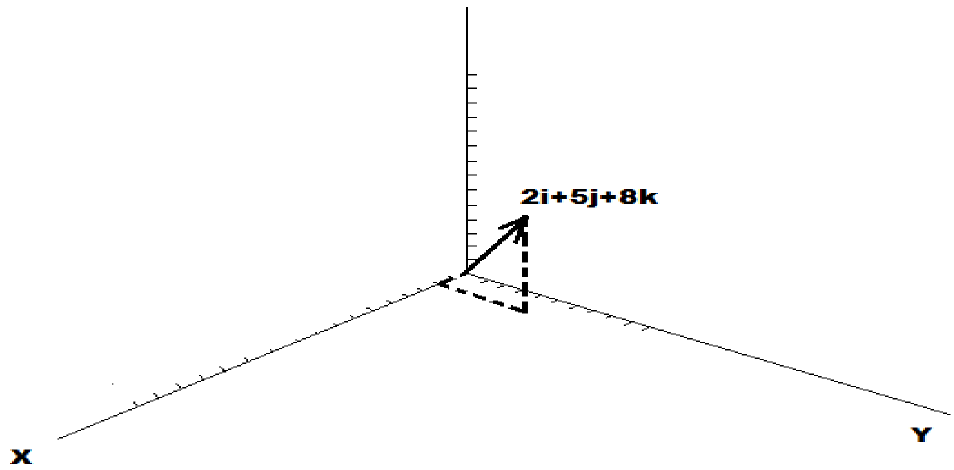


Ejemplo 3:

Grafique el vector $w = 2i + 5j + 8k$

Solución

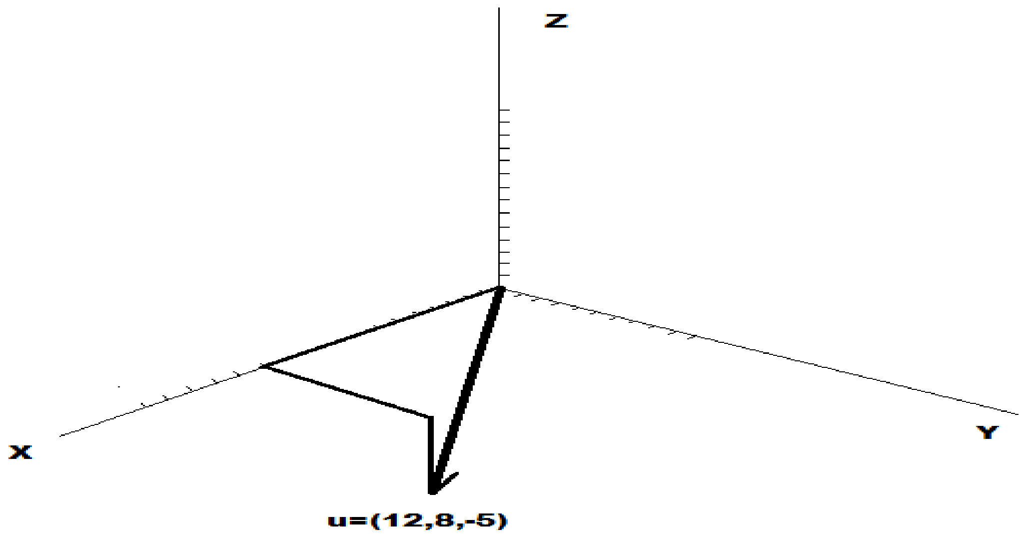
Se debe ubicar en el espacio el punto de coordenadas (2, 5, 8).



Ejemplo 4:

Grafique el vector:

$u = (12,8,-5))$



- **CÁLCULO DE LA NORMA DE UN VECTOR:**

Sea el vector en lR^2 $v=(a,b)\vee v=ai+bj$

Su magnitud o norma se calcula como:

$$|v|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Sea el vector en lR^3 $v=(a,b,c)\vee v=ai+bj+ck$

Su magnitud o norma se calcula como:

$$|v|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Ejemplo 1: Calcule la norma del vector $u=4i-2j+3k$

Solución

$$|u|=\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{16+4+9}=\sqrt{29}$$

Ejemplo 2: Calcule la norma del vector $v=(4,3)$

Solución

$$|v|=\sqrt{(4)^2+(3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

ÁNGULOS DIRECTORES

El ángulo director de cualquier vector en lR^2 distinto de cero es el ángulo θ que se mide desde el lado positivo del eje x en sentido contrario al del reloj hasta la representación de posición del vector. Si θ se mide en radianes, $0\le\theta\le 2\pi$ Si $\mathbf{A}=(a,b)$, entonces $\tan\theta=\frac{b}{a},\ si\ a\neq 0$. Sí $a=0\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\vee\theta=\frac{3\pi}{2}$.

NOTA:

- En el primer cuadrante: $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
- En el segundo cuadrante: $\theta=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

- En el tercer cuadrante: $\theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
- En el cuarto cuadrante: $\theta = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
- Si $a = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2},\ para\ b > 0 \wedge \theta = \frac{3}{2}\pi,\ para,\ b < 0$

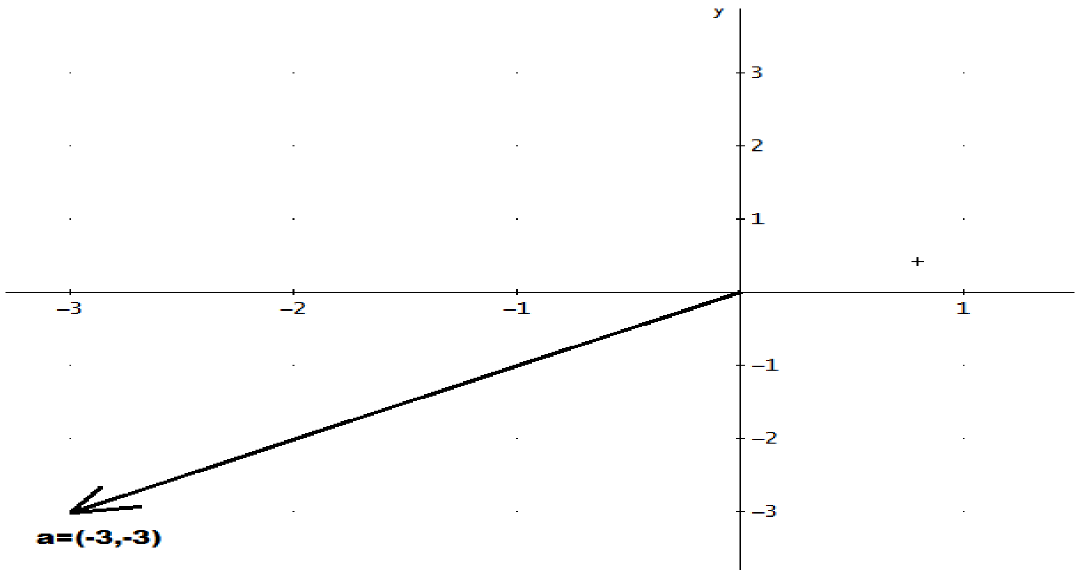
Ejemplos:

Trace cada uno de los siguientes vectores, encuentre su magnitud y el ángulo positivo θ más pequeño que está determinado por el eje positivo de x y el vector.

1. $\mathbf{a} = \langle -3, -3 \rangle$. R: $\|\mathbf{a}\| = 3\sqrt{2} \wedge \theta = 5\pi/4$

SOLUCIÓN

Gráfica:



Magnitud o norma:

$$|a| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9*2} = 3\sqrt{2}$$

Ángulo:

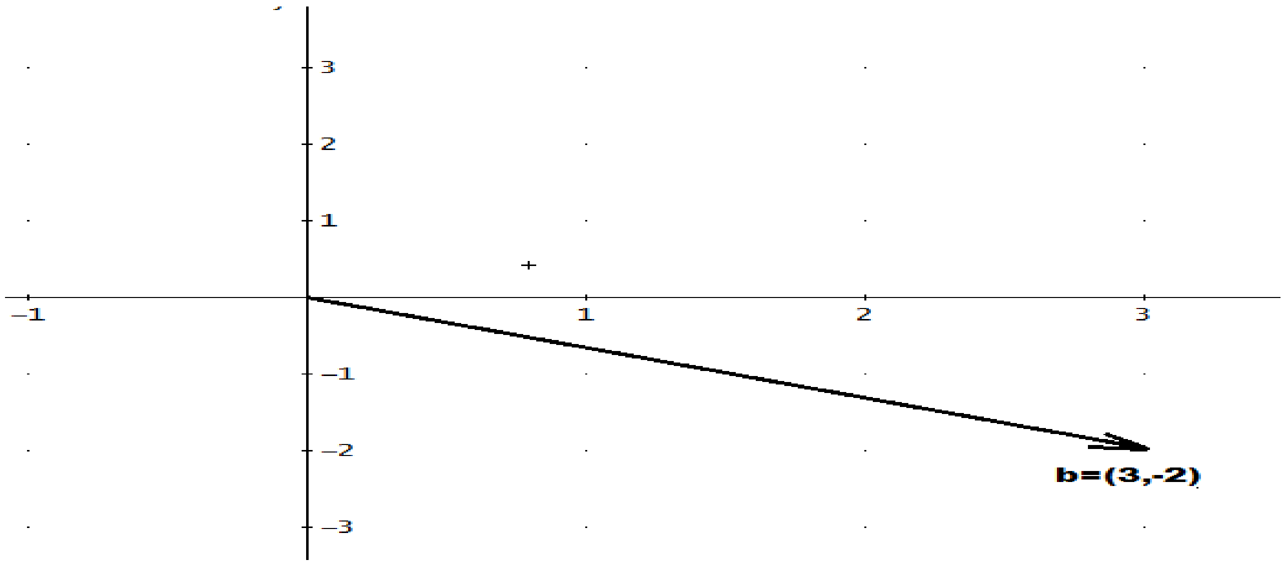
Podemos ver que el vector se encuentra en el tercer cuadrante, por lo tanto:

$$\theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 180 + \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-3}\right) = 225^0 = 5\pi/4$$

2. $\mathbf{b} = \langle 3,\text{-}2 \rangle$.

SOLUCIÓN

Gráfica:



Magnitud o norma:

$$|b| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Ángulo:

Podemos ver que el vector se encuentra en el cuarto cuadrante, por lo tanto:

$$\theta = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 360 + \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = 326.309...^0 = 5.695...radianes$$

Los ángulos directores de un vector en lR^3 diferente de cero son los tres ángulos que tienen la medida no negativa en radianes $\alpha, \beta \wedge \gamma$, tomadas desde los ejes positivos x, y e z respectivamente, hasta la representación de posición del vector.

Donde la medida en radianes de cada ángulo director esta en $[0, \pi]$, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|},\ \cos\beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|} \wedge \cos\gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|}$$

Estos números se llaman los cosenos directores del vector **v**

El vector cero no tiene ángulos directores y por lo tanto no tiene cosenos directores.

Ejemplo: Determine la magnitud y los cosenos directores del vector

$\mathbf{A} = \langle 3,2,-6 \rangle$

Solución:

Magnitud:

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

Cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{3}{7},\ \cos\beta = \frac{2}{7} \wedge \cos\gamma = \frac{-6}{7}$$

TEOREMA:

Si $\cos\alpha,\ \cos\beta \wedge \cos\gamma$ son los ángulos directores de un vector, entonces

$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$

Ejemplo:

Encuentre los cosenos directores del vector $v = (1,\ -2,\ 3)$ y demuestre la identidad trigonométrica.

Solución

Norma o magnitud:

$$|v| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

Cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{14}} \wedge \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Identidad trigonométrica:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14} = \frac{1+4+9}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

- **OPERACIONES CON VECTORES.**

ADICIÓN O SUMA DE VECTORES.

La suma de vectores se realiza igual que la suma de matrices, es decir se suman las correspondientes entradas.

$$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle a+b, c+d\rangle$$

$$\langle a_1, b_1, c_1\rangle + \langle a_2, b_2, c_2\rangle = \langle a_1 + a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1 + c_2\rangle$$

Ejemplo:

Sean: $w = (-3,5) \wedge v = 2i + 3j$

Halle w + v

$$w + v = (-3+2)i + (5+3)j = -i + 8j$$

Ejemplo:

Sean: $u = 5i - 6j + 7k \wedge v = (4,8,3)$

Halle: $u + v$

$$u + v = (5+4)i + (-6+8)j + (7+3)k = 9i + 2j + 10k$$

PROPIEDADES PARA LA ADICIÓN DE VECTORES:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{-a}) = \mathbf{0}$$

VECTORES UNITARIOS $i \wedge j\ en\ lR^2$ Y VECTORES UNITARIOS $i,\ j \wedge k\ en\ lR^3$

Se llaman vectores unitarios porque su magnitud es igual a uno y se utilizan para representar cualquier vector en $lR^2\ (i \wedge j)$ o cualquier vector en $lR^3\ (i,\ j \wedge k\ )$, tenemos que:

En lR^2:

$$i = (1,0) \wedge j = (0,1)$$

$$v = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = ai + bj$$

En lR^3

$$i = (1,0,0),\ j = (0,1,0) \wedge k = (0,0,1)$$

$$v = (a,b,c) = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = ai + bj + ck$$

MULTIPLICACIÓN PORESCALAR

La multiplicación por escalar se realiza igual que en la multiplicación de matrices.

$$k\langle a,b\rangle = \langle ka,kb\rangle$$

Ejemplo:

Sea $u = (4,7)$

Halle:

$2u$

Solución:

$2u = 2(4,7) = (2*4,2*7) = (8,14) = 8i + 14j$

Ejemplo2:

Sea $v = 9i - 7j + 12k$

Halle $6v$

Solución:

$6v = 6(9i - 7j + 12k) = 6*9i - 6*7j + 6*12k = 54i - 42j + 72k$

VECTOR **0**

$\mathbf{0} = \langle 0,0 \rangle$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR DE VECTORES

$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$

$(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$

$\text{cd)}\ \ \mathbf{a} = \text{c(d}\ \ \mathbf{a}) = \text{d(c}\ \ \mathbf{a})$

$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

$0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

NOTA:

Si $v = (a,b) = ai + bj \wedge \alpha$ es un escalar, entonces: $|\alpha v| = |\alpha||v|$

Y la dirección de αv es:

La dirección de $v,\ si\ \alpha > 0$

La dirección de $v + \pi,\ si\ \alpha < 0$

Ejemplos:

Sea $v = 3i - 5j$ Halle:

1. $|v|$

   Solución:

   $|v| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

2. θ_v

   Solución:

   El vector se encuentra en el cuarto cuadrante, por lo tanto:

   $$\theta_v = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 360 + \tan^{-1}\left(\frac{-5}{3}\right) = 300.96...^0 = 5.25...rad.$$

3. $w = 2v$

Solución:

$w = 2v = 2(3i - 5j) = 6i - 10j$

4. $|w|$

Solución:

$$|w| = \sqrt{(6)^2 + (-10)^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = \sqrt{4*34} = 2\sqrt{34} = 2|v|$$

5. θ_w

Solución:

El vector se encuentra en el cuarto cuadrante, por lo tanto:

$$\theta_w = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 360 + \tan^{-1}\left(\frac{-10}{6}\right) = 300.96...^0 = 5.25...rad.$$

6. $p = -3v$

Solución:

$p = -3v = -3(3i - 5j) = -9i + 15j$

7. $|p|$

Solución:

$$|p| = \sqrt{(-9)^2 + (15)^2} = \sqrt{81+225} = \sqrt{306} = \sqrt{9*34} = 3\sqrt{34} = 3|v|$$

8. θ_p

Solución:

El vector se encuentra en el segundo cuadrante, por lo tanto:

$$\theta_p = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = 180 + \tan^{-1}\left(\frac{15}{-9}\right) = 120,96...^0 = 2.11...rad$$

VECTOR UNITARIO **U**

Es un vector cuya magnitud es 1

Si $\mathbf{a} = (a,b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, entonces el vector unitario **U** que tiene la misma dirección que **a** está dado por: $\mathbf{U} = \frac{a}{|\mathbf{a}|}\mathbf{i} + \frac{b}{|a|}\mathbf{j}$

Para lR^3 tenemos:

$\mathbf{a} = \langle a,b,c\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $\mathbf{U} = \frac{a}{|a|}\mathbf{i} + \frac{b}{|a|}\mathbf{j} + \frac{c}{|a|}\mathbf{k}$

Ejemplo:

Dados los puntos $R(2,-1,3) \wedge S(3,4,6)$, determine el vector unitario que tenga la misma dirección que $V(\overrightarrow{RS})$

SOLUCIÓN

$$V(\overrightarrow{RS}) = (3-2)\mathbf{i} + (4--(1))\mathbf{j} + (6-3)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\left\|V(\overrightarrow{RS})\right\| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{35}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{35}}\mathbf{k}$$

PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar entre dos vectores **u** y **v** se simboliza por **u.v**.

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle \wedge \mathbf{B} = \langle a_2, b_2\rangle$ son dos vectores en lR^2, entonces al producto escalar de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, representado por $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ esta dado por.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle a_1, b_1\rangle \cdot \langle a_2, b_2\rangle = a_1a_2 + b_1b_2$$

Si u y v son vectores en lR^3 se tiene que:

$$\mathbf{u.v} = \langle a_1, b_1, c_1\rangle \cdot \langle a_2, b_2, c_2\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

El producto escalar de dos vectores es un número real (o escalar) y no un vector. También recibe el nombre de **producto punto o producto interior**.

Ejemplos: Determine el producto escalar de los siguientes vectores:

1. $v = (4,3) \wedge w = (6,2)$

Solución:

$$v.w = (4,3).(6,2) = 4*6 + 3*2 = 24 + 6 = 30$$

2. $v = (5,-3) \wedge w = (3,7)$

Solución:

$$v.w = (5,-3).(3,7) = 5*3 + (-3)(7) = 15 - 21 = -6$$

De la definición de producto escalar podemos notar que:

$$v \bullet v = |v|^2$$

Ejemplo:

Si $\mathbf{A} = \langle 2,-3 \rangle \wedge \mathbf{B} = \langle -1/2,4 \rangle$ determine $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 2(-1/2) + (-3)(4) = -1-12 = -13$$

NOTA:

$$\mathbf{i.i} = 1,\ \mathbf{j.j} = 1 \wedge \mathbf{i.j} = 0$$

TEOREMA:

Si **A** y **B** son vectores en $lR^2 \vee lR^3$ y c es un escalar, entonces

$$c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = c\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{0.A} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$$

- **ANGULO ENTRE DOS VECTORES**

Sean: $v = (a_1, b_1) \wedge w = (a_2, b_2)$ dos vectores diferentes de cero, entonces el ángulo φ entre **v** y **w** está definido como el ángulo no negativo más pequeño entre dichos vectores y que tienen el origen como punto inicial.

El ángulo se calcula como:

$$\cos\varphi = \frac{w \bullet v}{|w| * |v|}$$

Ejemplos: Para cada par de vectores: Calcule el ángulo entre ellos.

1. $w = 2i + 3j \wedge v = -7i + j$

Solución

$$|v| = \sqrt{(-7)^2 + (1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

$$|w| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\cos\varphi = \frac{w \bullet v}{|w| * |v|} = \frac{2(-7)+3(1)}{\sqrt{13} * \sqrt{50}} = \frac{-14+3}{\sqrt{13*50}} = \frac{-11}{\sqrt{650}} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{650}}\right) = 2.0169...rad = 115.55...^0$$

2. $w = (2,-3) \wedge v = (-4,6)$

Solución:

$$|v| = \sqrt{(-4)^2 + (6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

$$|w| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\cos\varphi = \frac{w \bullet v}{|w| * |v|} = \frac{2(-4)+(-3)(6)}{\sqrt{13} * \sqrt{52}} = \frac{-8-18}{\sqrt{13*52}} = \frac{-26}{\sqrt{676}} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-26}{\sqrt{676}}\right) = \pi \ rad = 180^0$$

3. $u = 3i - j + 2k \wedge v = 4i + 3j - k$

Solución:

$$|u| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$|v| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$$

$$\cos\varphi = \frac{u \bullet v}{|u| * |v|} = \frac{3(4)+(-1)(3)+2(-1)}{\sqrt{14} * \sqrt{26}} = \frac{12-3-2}{\sqrt{14*26}} =$$

$$\frac{7}{\sqrt{364}} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{364}}\right) = 1.195\ldots\ rad = 68{,}47\ldots^{0}$$

TEOREMA:

Si ϕ es la medida en radianes del ángulo entre dos vectores en $lR^2 \vee lR^3$ **A** y **B** diferentes de cero, entonces:

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|\ \cos\phi$

VECTORES PARALELOS:

Dos vectores diferentes de cero $u \wedge v\ en\ lR^2 \vee lR^3$ son paralelos si el ángulo entre ellos es cero o π , es decir, si $\phi = 0 \vee \phi = \pi$

SE DICE QUE DOS VECTORES **A** y **B** SON PARALELOS SI Y SOLO SI UNO ES MULTIPLO ESCLAR DEL OTRO.

ES DECIR DOS VECTORES **A** Y **B** SON PARALELOS SI SE CUMPLE QUE:

Si $A.B = \pm|A||B|$ es decir si $\cos\phi = \pm 1$

- **VECTORES ORTOGONALES**

Dos vectores diferentes de cero $u \wedge v\ en\ lR^2 \vee lR^3$ son ortogonales (o perpendiculares) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$, es decir, si $\phi = \pi / 2$

SE DICE QUE DOS VECTORES **A** y **B** SON ORTOGONALES (O PERPENDICULARES) SI Y SOLO SI:

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0$, es decir, si $\cos\phi = 0$

Ejemplo1:

Compruebe que los vectores $u = 3i - 4j \wedge v = 4i + 3j$ son ortogonales

Solución:

$$u.v = 3(4) + (-4)3 = 0 \Rightarrow \cos\phi = \frac{u.v}{|u||v|} = 0 \Rightarrow \phi = \cos^{-1} 0 \Rightarrow \phi = \pi / 2$$

Ejemplo2:

Demuestre, mediante vectores que los puntos $A(4,9,1)$, $B(-2,6,3) \wedge C(6,3,-2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo

Construya el triángulo CAB, observe que el ángulo en A es el que parece ser recto. Encontremos $V\left(\overrightarrow{AB}\right) \wedge V\left(\overrightarrow{AC}\right)$, si el producto escalar entre estos dos vectores es cero, es porque estos dos vectores son ortogonales, es decir el ángulo entre ellos es recto.

$$V\left(\overrightarrow{AB}\right) = (-2-4)i + (6-9)j + (3-1)k \wedge V\left(\overrightarrow{AC}\right) = (6-4)i + (3-9)j + (-2-1)k$$

$$V\left(\overrightarrow{AB}\right) = -6i - 3j + 2k \wedge V\left(\overrightarrow{AC}\right) = 2i + -6j + 3k$$

$$V\left(\overrightarrow{AB}\right) \bullet V\left(\overrightarrow{AC}\right) = -6*2 + (-3)(-6) + 2*3 = -12 + 18 - 6 = 0$$

- PROYECCIONES EN $lR^2 \wedge lR^3$

Sean u y v dos vectores diferentes de cero, entonces la proyección de u sobre v, denotada por $proy_v u$ esta definida por:

$$proy_v u = \frac{u.v}{|v|^2} v$$

Ejemplos:

a) Sean: $u = 2i + 3j + k \wedge v = i + 2j - 6k$ Encuentre $proy_v u$

SOLUCIÓN:

$$proy_v u = \frac{u.v}{|v^2|} v = \frac{2*1 + 3*2 + 1*(-6)}{\left(1^2 + 2^2 + (-6)^2\right)}(i + 2j - 6k) = \frac{2}{41}(i + 2j - 6k)$$

b) Sean: $u = 2i - 3j \wedge v = i + j$ Halle $proy_v u$

Solución

$$proy_v u = \frac{2*1 + (-3)*1}{\left(1^2 + 1^2\right)}(i + j) = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j$$

NOTA:

$v \wedge proy_v u$ Tienen:

La misma dirección cuando $u \bullet v > 0$

Direcciones opuestas cundo $u \bullet v < 0$

NOTA:

$proy_v u$ Es paralelo a v

$u - proy_v u$ Es ortogonal a v

- **DETERMINACIÓN DE UN VECTOR ORTOGONAL A OTRO VECTOR**

Sea v un vector diferente de cero, entonces para cualquier otro vector u, se puede obtener otro vector w ortogonal a v de la siguiente manera.

$$w = u - proy_v u \text{, es decir, } w = u - \frac{(u \bullet v)}{|v|^2} v$$

TAREA: Demuestre que $v \wedge w$ son ortogonales.

Ejemplos: Para el par de vectores $v \wedge u$ halle un vector w ortogonal al vector v

1. $v = (3,5) \wedge u = (7,2)$

   Solución:

$$w = u - \frac{(u \bullet v)}{|v|^2} v = (7,2) - \frac{3*7+5*2}{3^2+5^2} * (3,5) = (7,2) - \frac{31}{34}(3,5) = (7,2) - \left(\frac{93}{34}, \frac{155}{34}\right) = \left(\frac{145}{34}, -\frac{87}{34}\right)$$

Demuestre que $v \wedge w$ son ortogonales:

$$v \bullet w = (3,5) \bullet \left(\frac{145}{34}, -\frac{87}{34}\right) = 3 * \frac{145}{34} + 5 * \left(-\frac{87}{34}\right) = 0$$

Grafique los tres vectores en el mismo plano

2. $v = (-2,3) \wedge u = (5,-1)$

$$w = u - \frac{(u \bullet v)}{|v|^2} v = (5,-1) - \frac{-2*5+3(-1)}{(-2)^2+3^2} * (-2,3) = (5,-1) - \frac{-13}{13}(-2,3) = (5,-1) + (-2,3) = (3,2)$$

$$v \bullet w = (-2,3) \bullet (3,2) - 6 + 6 = 0$$

- **PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ**

El producto cruz sólo se define en lR^3

Sean: $u = a_1 i + b_1 j + c_1 k \wedge v = a_2 i + b_2 j + c_2 k$ Entonces el producto cruz o producto vectorial de u y v, denotado como $u\,x\,v$ es un nuevo vector y se calcula como:

$$u\,x\,v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)i - (a_1c_2 - a_2c_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

NOTA:

El vector $u\,x\,v$ es perpendicular a u y a v.

Ejemplo:

Sean: $u = 2i + 4j - 5k \wedge v = -3i - 2j + k$

Halle: $u\,x\,v$

SOLUCION:

$$u\,x\,v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4*1 - (-2)*(-5))i - (2*1 - (-3)(-5))j + (2*(-2) - (-3)*4)k$$

$$u\,x\,v = -6i + 13j + 8k$$

Ejemplo:

Sean $\mathbf{A} = \langle 2,1,-3 \rangle \wedge \mathbf{B} = \langle 3,-1,4 \rangle$

$$\mathbf{A}X\mathbf{B} = \langle 1*4 - (-3)(-1), (-3)(3) - (2)(4),\ (2)(-1) - (1)(3) \rangle = \langle 1,\ -17, -5 \rangle = i - 17j - 5k$$

TEOREMA:

Si **A**, **B** y **C** son vectores en lR^3, entonces

1. $\mathbf{A}X\mathbf{A} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{0}X\mathbf{A} = \mathbf{0}$
3. $\mathbf{A}X\mathbf{0} = \mathbf{0}$

4. $\mathbf{A}X\mathbf{B} = -\mathbf{B}X\mathbf{A}$
5. El producto vectorial no es asociativo, es decir $\mathbf{A}X(\mathbf{B}X\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}X\mathbf{B})X\mathbf{C}$
6. $\mathbf{A}X(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}X\mathbf{B} + \mathbf{A}X\mathbf{C}$
7. $(c\mathbf{A})X\mathbf{B} = \mathbf{A}X(c\mathbf{B})$
8. $(c\mathbf{A})X\mathbf{B} = c(\mathbf{A}X\mathbf{B})$
9. $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}X\mathbf{C} = \mathbf{A}X\mathbf{B} \bullet \mathbf{C}$ Esta propiedad se llama triple producto escalar de los vectores $A,\ B \wedge C$
10. $\mathbf{A}X(\mathbf{B}X\mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\mathbf{C}$
11. $\|\mathbf{A}X\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\cos\theta$
12. Los vectores **A** y **B** son paralelos si y solo si $\mathbf{A}X\mathbf{B} = \mathbf{0}$
13. El vector $\mathbf{A}X\mathbf{B}$ es ortogonal al vector **A** y al vector **B**.
14. $A.(AXB) = B.(AXB) = 0$, es decir, AXB es ortogonal a A y a B.

5.2.1.1 RECTAS Y PLANOS EN R3.

- **RECTAS EN EL ESPACIO.**

gráfica:

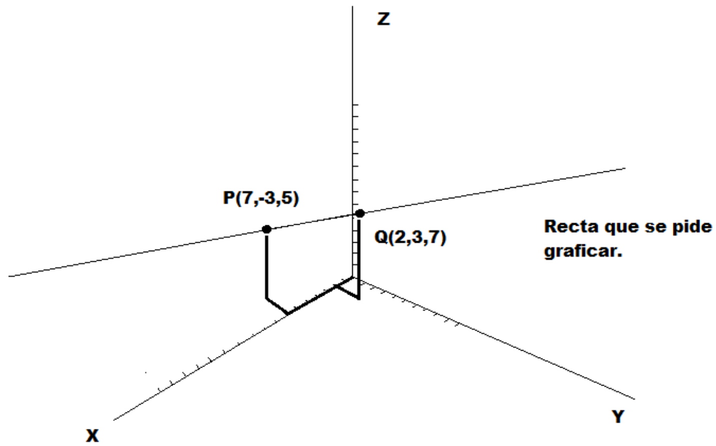
Para graficar rectas en el espacio se debe conocer las coordenadas de dos puntos sobre la recta y luego se traza una línea recta que pase por ambos puntos:

Grafique cada una de las siguientes rectas.

1. Pasa por los puntos: $P = (7,-3,5) \wedge Q = (2,3,7)$

SOLUCIÓN

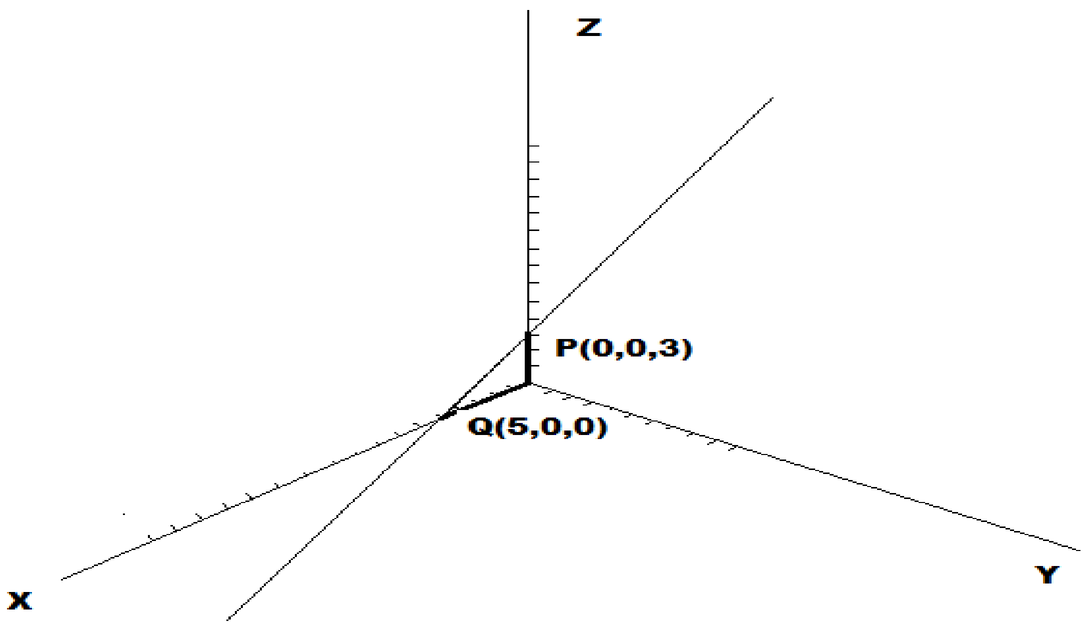
La gráfica la podemos ver en la siguiente figura:



2. Pasa por los puntos: $P=(0,0,3)\wedge Q=(5,0,0)$

Solución:

La gráfica la podemos ver en la siguiente figura:



ECUACIONES DE UNA RECTA

La siguiente teoría es una síntesis tomada del autor GROSSMAN

Para determinar una recta en el espacio se debe conocer las coordenadas de dos puntos, o También se debe conocer un punto y la dirección de la recta.

Dados dos puntos de coordenadas $P=(x_1, y_1, z_1)$ y $Q=(x_2, y_2, z_2)$ sobre una recta L en el espacio véase la figura:

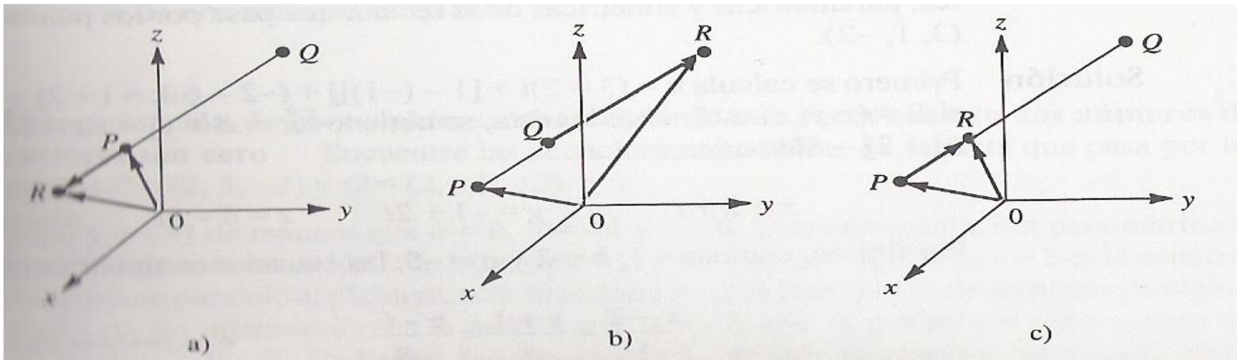


Figura 3.35 En los tres casos $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR}$

El vector

$$v=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)$$

Es un vector que está sobre la recta L, es decir, es un vector paralelo a L.

Sea $R=(x,y,z)$ otro punto sobre la recta L. Entonces el vector $\overrightarrow{PR}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{PQ}$, que a su vez es paralelo a al vector v.

Como $\overrightarrow{PR}$ es paralelo al vector v, podemos asegurar que:

$$\overrightarrow{PR}=tv$$

Para cualquier número real t.

Tenemos que $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$, es decir:

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+tv$$

Esta ecuación se llama ecuación vectorial de la recta L

Con:

$$\overrightarrow{OR}=xi+yj+zk$$

$$\overrightarrow{OP}=x_1i+y_1j+z_1k$$

$tv = t(x_2 - x_1)i + t(y_2 - y_1)j + t(z_2 - z_1)$

Remplazando estas expresiones en la ecuación vectorial de L tenemos:

$$xi + yj + zk = x_1 i + y_1 j + z_1 k \; + (x_2 - x_1)i + t(y_2 - y_1)j + t(z_2 - z_1)$$

Igualando término a término tenemos:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Que se llaman ecuaciones paramétricas de la recta L

Despejando t en cada ecuación tenemos que:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

O

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Con:

$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

$$c = z_2 - z_1$$

Que se llaman ecuaciones simétricas de la recta L.

Ejemplo:

Determine las ecuaciones vectoriales, simétricas y paramétricas de la recta L que pasa por el punto $P = (2, -1, 6) \wedge Q = (3, 1, -2)$. Grafique la recta.

SOLUCIÓN

Primero hallemos el vector v

$$v = (3 - 2)i + (1 - (-1))j + (-2 - 6)k \Rightarrow v = i + 2j - 8k$$

Luego hallamos el vector $\overrightarrow{OP} = (2-0)i + (-1-0)j + (6-0)k = 2i - j + 6k$

Sea $R = (x, y, z)$ un punto sobre la recta L.

Debemos hallar el vector $\overrightarrow{OR} = xi + yj + zk$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + tv$$

Remplazando en la ecuación anterior tenemos:

$$xi + yj + zk = 2i - j + 6k + t(i + 2j - 8k)$$

Igualando término a término tenemos que:

$$x = 2 + t$$

$$y = -1 + 2t$$

$$z = 6 - 8t$$

Despejando t de las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-8}$$

La prueba se da remplazando los puntos P y Q en la ecuación anterior y se debe obtener tres igualdades.

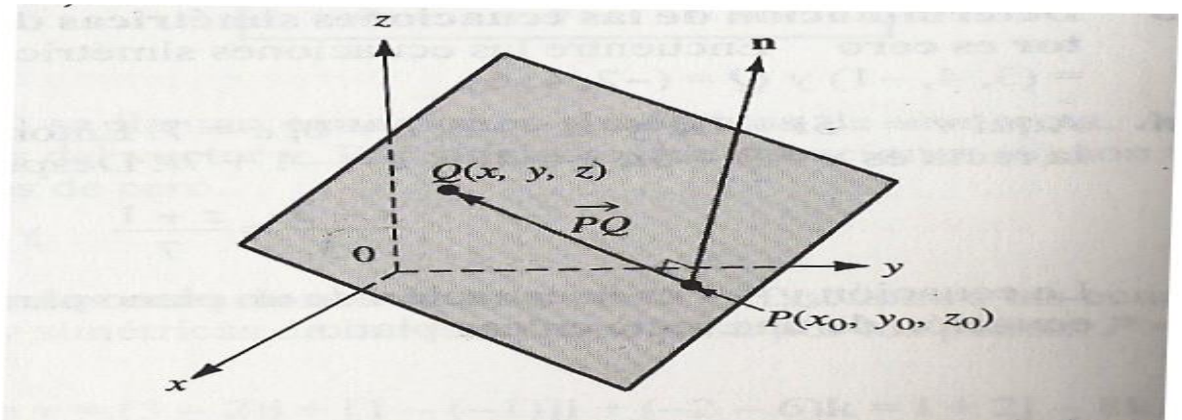
Para encontrar otros puntos sobre la recta se elige un valor de t y se remplaza en cada ecuación simétrica.

Por ejemplo para t = 3 se obtiene el punto $(5,\ 5,\ -18)$

PLANOS EN EL ESPACIO:

La siguiente teoría es una síntesis del autor GROSSMAN

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$P un punto en el espacio y sea **n**$= ai + bj + ck$ un vector dado diferente de cero. El conjunto de todos los puntos $Q = (x, y, z)$ para los que $\overrightarrow{PQ} \bullet$ **n** $= 0$ constituye un plano en lR^3



El vector **n** es ortogonal a todos los vectores en el plano

Notación de un plano: Para simbolizar un plano se utiliza: π

$$\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k \wedge n = ai + bj + ck$$

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \mathbf{n} = 0 \Rightarrow [(x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k] \bullet (ai + bj + ck) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

$ax + by + cz = d$ Ecuación cartesiana de un plano

Con: $d = ax_0 + by_0 + cz_0$

Ejemplos:

1. Encuentre la ecuación del plano π que pasa por el punto $(2,5,1)$ cuyo vector normal es $n = i - 2j + 3k$

SOLUCIÓN

Con:

$$a = 1,\ b = -2 \wedge c = 3$$

Tenemos que:

$$x - 2y + 3k = 1(2) + (-2)5 + 3(1)$$

$$x - 2y + 3z = -5$$

Otra forma:

$$1(x-2)-2(y-5)+3(z-1)=0$$

2. Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos: $P=(1,2,1),\ Q=(-2,3,-1)\ \wedge R=(1,0,4)$

SOLUCIÓN

El vector normal se encuentra efectuando el producto cruz de dos de los vectores que unen a los tres puntos.

Con el vector y uno de los puntos se halla la ecuación del plano.

$$\overrightarrow{PQ}=-3i+j-2k \wedge \overrightarrow{QR}=3i-3j+5k$$

$$n=\overrightarrow{PQ}\ X\ \overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}=-i+9j+6k$$

Usando el punto R Tenemos:

$$\pi \Rightarrow -1(x-1)+9(y-0)+6(z-4)=0$$

$$-x+9y-6z=23$$

ECUACIONES DE LOS PLANOS COORDENADOS

3. PLANO xy

El plano xy pasa por el origen $(0,0,0)$ y cualquier vector a lo largo del eje z es normal a él.

El vector más simple es $k=(0,0,1)$

Tenemos que:

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$$

Lo que implica que: $z=0$

Planos paralelos al plano xy tienen la ecuación: $z=c$

4. PLANO xz tiene la ecuación: $y=0$

   Planos paralelos al plano xz tienen la ecuación: $y=b$

5. PLANO yz tiene la ecuación: $x=0$

   Planos paralelos al plano yz tienen la ecuación $x=a$

PLANOS PARALELOS

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos, es decir si el producto cruz de sus vectores normales es igual a cero.

Ejemplo:

Determine si los planos $\pi_1 : 2x+3y-z=3 \wedge \pi_2 : -4x-6y+2z=8$ son paralelos.

$$n_1 X n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0i + 0j + 0k = 0$$

$$\pi_1 \ ll \ \pi_2$$

PLANOS NO PARALELOS

Si dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta.

Ejemplo:

Encuentre todos los puntos de intersección de los planos:

$2x-y-z=3 \wedge x+2y+3z=7$

Se debe resolver un sistema de 2 X 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) R_2 = R_2 + R_1(-2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

$$-5y-7z=-11 \Rightarrow y = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}z$$

$$x + 2\left(\frac{11}{5} - \frac{7}{5}z\right) + 3z = 7 \Rightarrow x = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}z$$

Sea: $z=t$

La solución es:

$$x = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}t,\ y = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}t,\ z = t$$

5.2.2 EJERCICIOS DE AUTOEVALUCIÓN

Encuentre la magnitud o norma y los ángulos directores de cada vector. Dibuje cada vector.

- $v = (-15, -7, 4)$
- $v = 6i - 2j - 5k$
- $v = -4i + 8j - 13k$
- $v = (5, 3, -8)$

Rectas y planos en el espacio.

En los siguientes problemas encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de cada recta dada.

- Contiene a: $(5,\ 11,\ 4) \wedge (5,\ 12,\ -7)$
- Contiene a: $(1,\ 2,\ 3) \wedge (4,\ -2,\ 4)$

En los siguientes problemas encuentre la ecuación del plano

- $P = (6,\ -4,\ 5);\ n = 3i - 3j - 5k$
- Contiene a: $(4,\ -2,\ -7),\ (6,\ 1,\ 2) \wedge (3,\ -6,\ 8)$

ACTIVIDAD

1. Encuentre la magnitud o norma y la dirección de cada uno de los siguientes vectores, además dibuje cada vector:

- $v = (4, -9)$
- $v = (-14, -4)$
- $v = (-5, 12)$
- $w = \left(-5, \sqrt{3}\right)$
- $w = (1, -14)$
- $w = 2i - 3j$

2. Encuentre la magnitud o norma y los ángulos directores de cada vector. Dibuje cada vector:

- $v = (3, -3, 2)$

- $v = 2i - j + k$
- $v = -2i - 3j - k$
- $v = 2i + 5j - 7k$
- $v = -3i - 3j + 5k$
- $v = i + 2k$

3. Dados los siguientes vectores encuentre vectores unitarios para cada uno de ellos:

- $v = 12i + 3j$
- $v = 2i - 3j + 2k$
- $v = -3j - 5k$
- $v = i + j + k$

4. Calcule el producto escalar entre el par de vectores dados y el ángulo entre ellos.

- $u = i + j \wedge v = i - j$
- $u = -3i \wedge v = 12j$
- $u = i + 5j \wedge v = 3i + 2j$
- $u = 3i - 12j + 2k \wedge v = -2i + 3j - 7k$
- $u = -4k \wedge v = 2i + 5j - 4k$
- $u = i + j + k \wedge v = -2j + 5k$

5. Determine si los dos vectores dados son paralelos, ortogonales o ninguno de los dos:

- $u = 2i + 5j \wedge v = -6i - 10j$
- $u = 6i - 4j \wedge v = 2i + 3j$
- $u = 12i + 18j \wedge v = 6i + 4j$
- $u = 2i + 3j \wedge v = -3i + 2j$
- $u = 4i - 3j + 5k \wedge v = -8i + 6j + 10k$

6. Sean: $u = i - 3j + 2k,\ v = -3i - 5j + 6k,\ w = 3i - 7j + 2k \wedge t = i - 5j + 5k$

   Halle:

- $u + v$
- $2u - 3v$
- $t + 3w - v$

- $2u - 7w + 5v$
- $2v + 7t - w$
- $u.v$
- $|w|$
- $u.w - w.t$
- $proy_u v$
- $proy_t w$

7. Calcule $proy_v u$

- $u = (-15,27,63) \wedge v = (-84,-77,51)$
- $u = (4,-3) \wedge v = (-6,4)$
- $v = (5,2) \wedge u = (-3,-5)$
- $u = 3i + 5j - 2k \wedge v = 7i + 12k$
- $u = 5i - 2j - 8k \wedge v = i - 3j - 3k$

8. Encuentre el producto cruz $u \ x \ v$

- $u = 2i - 4j + 3k \wedge v = 6i - 3j + 5k$
- $u = 3i - 9j + 15k \wedge v = 3i - j - k$
- $u = i + 7j - 3k \wedge v = -i - 7j + 3k$
- $u = 3i - 2j \wedge v = 3k$
- $u = -15i - 10j + 5k \wedge v = 6i + 4j - 2k$

9. En los siguientes problemas encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de cada recta dada.

- Contiene a: $(5,\ 1,\ 3) \wedge (1,\ 2,\ -1)$
- Contiene a: $(7,\ -1,\ 1) \wedge (-1,\ 1,\ -7)$
- Contiene a: $(-8,\ 1,\ 3) \wedge (2,\ 0,\ 1)$
- Contiene a: $(12,\ 3,\ -4) \wedge (2,\ 5,\ -4)$
- Contiene a: $(0,\ 2,\ 3) \wedge (3,\ 2,\ 11)$
- Contiene a: $(2,\ 1,\ 3) \wedge (-1,\ -2,\ 8)$

10. En los siguientes problemas encuentre la ecuación del plano

- $P = (4,\ 2,\ 3);\ n = i + 3j$
- $P = (-3,\ -4,\ 5);\ n = -3i - 4j + 5k.$
- $P = (0,\ -2,\ 5);\ n = 2i - 7j - 4k.$
- Contiene a: $(1,\ 2,\ -4),\ (3,\ 3,\ 7) \wedge (-3,\ -1,\ 3)$
- Contiene a: $(-2,\ 1,\ 0),\ (5,\ -1,\ 3) \wedge (4,\ 1,\ 5)$
- Contiene a: $(1,\ 0,\ 0);\ (0,\ 1,\ 0) \wedge (0,\ 0,\ 1)$
- Contiene a: $(2,\ 1,\ -2),\ (3,\ -1,\ -1) \wedge (3,\ 1,\ 4)$

6 BIBLIOGRAFÍA

6.1.1 LIBROS

BALDOR. Aurelio. Algebra. Madrid: Editorial Mediterráneo.

BELTRÁN. Luis P; RODRÍGUEZ. Benjamín P; DIAMATÉ S. Mónica C. Matemáticas con tecnología aplicada 10. 1 ed. Bogotá: Prentice Hall, 1977.

DE BURGOS. Juan. Algebra Lineal y geometría cartesiana. 3a edición. Ed. McGraw Hill/Interamericana de España. 2006.

DÍEZ M. Luis H. Matemáticas Operativas. 15 ed. Medellín: Zona Dinámica, 2002.

DIAZ SANTA, Georlin. Álgebra Lineal. 3ª edición. Medellín: editorial UPB. 2001.

GROSSMAN. Stanley I. Álgebra lineal. 5 ed. México: Mc Graw Hill, 1966.

HAEUSSLER. Ernest. F. Jr; RICHARD S. Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias sociales y de la vida. 8 ed. México: Prentice Hall, 1997.

HILL, Richard. Algebra Lineal Elemental con Aplicaciones. 3ª edición. Prentice Hall. 1997.

HOWARD. Anton. Introducción al Álgebra Lineal. Editorial Limusa Wiley. 2003.

MERINO L, SANTOS E. Algebra Lineal con métodos elementales. Ed. Thompson-Paraninfo. 2006.

NICHOLSONW. Keith, Algebra lineal con aplicaciones, 4ta edición, McGraw-Hill Interamericana, 2003.

S. T. Tan. Matemáticas para Administración y Economía. 1 ed. México: International Thompson editores, 1998.

SOLER FAJARDO, Francisco; MOLINA FOCAZZIO, Fabio; ROJAS CORTÉS, Lucio. Álgebra Lineal y Programación Lineal aplicaciones a ciencias Administrativas, Contables y Financieras. 2 ed. Bogotá: Ecoe ediciones, 2005.

STEWAR. James; REDLIN. Lothar; WATSON. Saleem. Precálculo. 3ed. México: International Thomson Editores, 2001.

SWOKOWSKI. Earl W. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 2 ed. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1986.

ZILL. Dennis G; DEWAR. Jacqueline M. Algebra y Trigonometría. 2 ed. México: Mc Graw Hill. 1995.

6.1.2 PÁGINAS WEB

http://www1.universia.net/CatalogaXXI/pub/ir.asp?IdURL=127020&IDC=10010&IDP=ES&IDI=1

Fecha de consulta enero de 2010.

http://www.ma1.upc.edu/~rafael/al/matrices.pdf

Fecha de consulta de 2010.

http://www.ma1.upc.edu/~rafael/al/determinantes.pdf

Fecha de consulta enero de 2010.

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

Fecha de consulta enero de 2010.

http://cnx.org/content/m12862/latest/

Fecha de consulta enero de 2010

http://elcentro.uniandes.edu.co/cr/mate/algebralineal/index.htm

Fecha de consulta enero de 2010

http://www.vitutor.com/algebralineal.html

Fecha de consulta enero de 2010

http://es.wikibooks.org/wiki/%C3%81lgebra_Lineal

Fecha de consulta enero de 2010

http://www.youtube.com/watch?v=FEorJI6qJNk

Fecha de consulta enero de 2010

http://video.google.com.co/videosearch?sourceid=navclient&hl=es&rlz=1T4WZPC_esCO342CO345&q=algebra+lineal&um=1&ie=UTF-8&ei=zX1XS83iIsaVtge_vbStBA&sa=X&oi=video_result_group&ct=title&resnum=11&ved=0CEAQqwQwCg#

Fecha de consulta enero de 2010

http://www.abaco.com.ve/

Fecha de consulta enero de 2010

http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/selectividad/rectas%20en%20el%20plano%20y%20en%20espacio.pdf

Consultado en mazo de 2010.

http://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:NkGUnYN9gbQJ:www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/Algebra-Lineal/algebra-vectorial-geova-walter/Vectores.pdf+rectas+y+planos+en+r3&hl=es&gl=co&pid=bl&srcid=ADGEESiqLfGz8vx1b0D1PMWywlUdXw-VWfTKGsLRgwLX6-Xpuj8rRrPytEBTlLK0pvH5rhBPWVGFJZt1wBlx75Sc2iAf6qWoOcCf9B_sLvfEbkKAmsRgdx7hUd4fRKJONzazkLVAUkUV&sig=AHIEtbTMWQ-hEjaq8nhP6UBbsgt-fb8T_g

Consultado en marzo de 2010.

http://www.monografias.com/trabajos12/exal/exal.shtml

Fecha de consulta enero de 2010