2. La *aditividad* estipula que la contribución total de todas las variables en la función objetivo y sus requerimientos en las restricciones, sean la suma directa de las contribuciones o requerimientos individuales de cada variable. En el modelo de Reddy Mikks, la utilidad total es igual a la suma de dos componentes individuales de utilidad. Sin embargo, si los dos productos *compiten* por la misma parte de mercado en forma tal que un aumento de ventas de uno afecte negativamente al otro, ya no se satisface la propiedad de aditividad.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.1A

1. Para el modelo de Reddy Mikks, defina cada una de las siguientes restricciones y exprésela con una constante del lado derecho:

a) La demanda diaria de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores en *al menos* 1 tonelada.

b) El uso diario de la materia prima *M2* es 6 toneladas *cuando mucho*, y 3 toneladas *cuando menos*.

c) La demanda de pintura para interiores no puede ser menor que la demanda de pintura para exteriores.

d) La cantidad mínima que se debe producir de pinturas para interiores y para exteriores es de 3 toneladas.

e) La proporción de pintura para interiores entre la producción total de pinturas para interiores y para exteriores no debe ser mayor que 0.5.

2. Determine la mejor solución *factible* entre las siguientes soluciones (factibles y no factibles) del modelo de Reddy Mikks:

a) $x_1 = 1, x_2 = 4$

b) $x_1 = 2, x_2 = 2$

c) $x_1 = 3, x_2 = 1.5$

d) $x_1 = 2, x_2 = 1$

e) $x_1 = 2, x_2 = -1$

3. Para la solución factible $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, del modelo de Reddy Mikks, determine

a) La cantidad no usada de la materia prima *M1*.

b) La cantidad no usada de la materia prima *M2*.

4. Suponga que Reddy Mikks vende su pintura para exteriores a un mayorista, con un descuento por volumen. La utilidad por tonelada es $5000 si el mayorista no compra más de 2 toneladas diarias, y de $4500 en los demás casos. ¿Se puede traducir esta situación a un modelo de programación lineal?

2.2 SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

El procedimiento de solución gráfica comprende dos pasos:

1. Determinación del espacio de soluciones que define *todas* las soluciones factibles del modelo.

2. Determinación de la solución óptima, entre todos los puntos factibles del espacio de soluciones.

Usaremos dos ejemplos en el procedimiento, para mostrar cómo se manejan las funciones objetivo de maximización y de minimización.

2.2.1 Solución de un modelo de maximización

Ejemplo 2.2-1

En este ejemplo se resolverá el modelo de Reddy Mikks, de la sección 2.1.

Paso 1. *Determinación del espacio de soluciones factibles:*
Primero, se tendrán en cuenta las restricciones de no negatividad $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. En la figura 2.1, el eje horizontal x_1 y el eje vertical x_2 representan las variables pintura para exteriores y pintura para interiores, respectivamente. En consecuencia, las restricciones de no negatividad limitan el área del espacio de soluciones al primer cuadrante: arriba del eje x_1 y a la derecha del eje x_2.

Para tener en cuenta las otras cuatro restricciones, primero se sustituye cada desigualdad con una ecuación, y a continuación se grafica la recta resultante, ubicando dos puntos diferentes de ella. Por ejemplo, después de sustituir $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ con la recta $6x_1 + 4x_2 = 24$, se pueden determinar dos puntos distintos, primero igualando $x_1 = 0$ para obtener $x_2 = \frac{24}{4} = 6$ y después igualando $x_2 = 0$ para obtener $x_1 = \frac{24}{6} = 4$. De este modo, la recta que pasa por los dos puntos (0, 6) y (4, 0) es la que se identifica con (1) en la figura 2.1.

A continuación consideraremos el efecto de la desigualdad. Todo lo que hace la desigualdad es dividir al plano (x_1, x_2) en dos semiespacios que en este caso son semiplanos, uno a cada lado de la línea graficada. Sólo una de esas dos mitades satisface la desigualdad. Para determinar cuál es el lado correcto, se elige cualquier *punto de referencia* en el primer cuadrante. Si satisface la desigualdad, el lado en el que está es el semiplano factible. En caso contrario, quiere decir que es el otro lado. Desde el punto

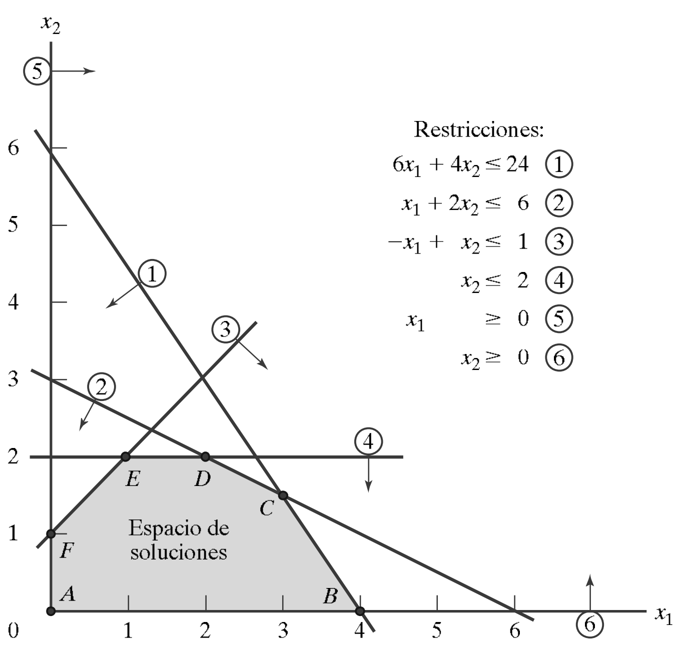


FIGURA 2.1
Espacio factible del modelo de Reddy Mikks

de vista de los cálculos, es cómodo seleccionar a (0, 0) como el punto de referencia, a menos que la recta pase por el origen; si así fuera, se debería elegir otro punto.

El uso del punto de referencia (0, 0) se ilustra con la restricción $6x_1 + 4x_2 \leq 24$. Como $6 \times 0 + 4 \times 0 = 0$ es menor que 24, el semiplano que representa la desigualdad incluye al origen (lo que se indica con la flecha en la figura 2.1). Para demostrar el uso de otros puntos de referencia, investigaremos (6, 0). En este caso $6 \times 6 + 4 \times 0 = 36$, que es mayor que el lado derecho de la primera restricción, y eso indica que el lado en el que está (6, 0) no es factible para la desigualdad. Este resultado es consistente con el que se obtuvo usando (0, 0) como punto de referencia.

Con la aplicación del procedimiento del punto de referencia a todas las restricciones del modelo se obtiene el espacio factible que se indica en la figura 2.1.

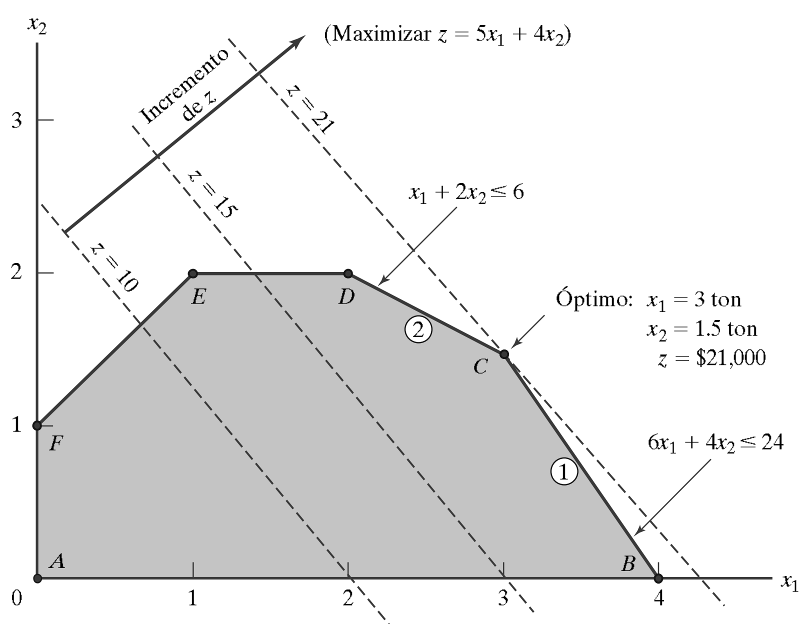
Paso 2. *Determinación de la solución óptima:*

El espacio factible de la figura 2.1 está delimitado por los segmentos de recta que unen a los vértices *A, B, C, D, E* y *F*. Todo punto dentro o en la frontera del espacio *ABCDEF* es factible, porque satisface todas las restricciones. Ya que el espacio factible *ABCDEF* está formado por una cantidad *infinita* de puntos, es obvio que se necesita un procedimiento sistemático para identificar la solución óptima.

Para identificar la solución óptima se requiere identificar la dirección en la que aumenta la función utilidad $z = 5x_1 + 4x_2$ (recuérdese que se está *maximizando* a z). Para hacerlo se asignan valores *arbitrarios* crecientes a z. Por ejemplo, si $z = 10$ y $z = 15$ equivaldría a graficar las dos rectas $5x_1 + 4x_2 = 10$ y $5x_1 + 4x_2 = 15$. En consecuencia, la dirección de aumento en z es la que se ve en la figura 2.2. La solución óptima se encuentra en C, que es el punto, en el espacio de soluciones, más allá del cual cualquier aumento en z saca a uno de las fronteras de *ABCDEF*.

FIGURA 2.2

Solución óptima del modelo de Reddy Mikks



Los valores de x_1 y x_2 correspondientes al punto óptimo C se calculan resolviendo las ecuaciones asociadas a las rectas (1) y (2), esto es, resolviendo

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 = 6$$

La solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 1.5$ y en ese caso $z = 5 \times 3 + 4 \times 1.5 = 21$. Eso equivale a una mezcla de productos de 3 toneladas de pintura para exteriores y 1.5 toneladas de pintura para interiores. La utilidad diaria correspondiente es $21,000.

No es por accidente que la solución óptima se encuentre en un **punto de esquina** del espacio de soluciones, donde se cruzan dos líneas. En realidad, si se cambia la pendiente de la función utilidad z (cambiando sus coeficientes), se verá que la solución óptima siempre se encuentra en esos puntos de *esquina*. Esta observación es clave para desarrollar el *algoritmo símplex* general que se presenta en el capítulo 3.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.2A

1. Determine el espacio factible para cada una de las siguientes restricciones independientes, cuando $x_1, x_2 \leq 0$.

a) $-3x_1 + x_2 \leq 6$
b) $x_1 - 2x_2 \geq 5$
c) $2x_1 - 3x_2 \leq 12$
d) $x_1 - x_2 \leq 0$
e) $-x_1 + x_2 \geq 0$

2. Identifique la dirección de aumento de z, en cada uno de los casos siguientes:

a) Maximizar $z = x_1 - x_2$
b) Maximizar $z = -5x_1 - 6x_2$
c) Maximizar $z = -x_1 + 2x_2$
d) Maximizar $z = -3x_1 + x_2$

3. Determine el espacio de soluciones y la solución óptima del modelo de Reddy Mikks para cada uno de los siguientes cambios independientes:

a) La demanda diaria máxima de pintura para exteriores es de 2.5 toneladas.
b) La demanda diaria de pintura para interiores es por lo menos de 2 toneladas.
c) La demanda diaria de pintura para interiores es exactamente 1 tonelada más que la de pintura para exteriores.
d) La disponibilidad diaria de la materia prima $M1$ es cuando menos 24 toneladas.
e) La disponibilidad diaria de la materia prima $M1$ es cuando menos 24 toneladas, y la demanda diaria de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores en al menos 1 tonelada.

4. Para el modelo original de Reddy Mikks, identifique el o los puntos de *esquina* que defina(n) la solución óptima para cada una de las siguientes funciones objetivo:

a) $z = 3x_1 + x_2$
b) $z = x_1 + 3x_2$
c) $z = 6x_1 + 4x_2$

¿En qué difiere la solución de c), de las de a) y b)?