UNIDAD 1 Conjuntos Numéricos

Introducción

En este capítulo se trabajará con los conjuntos numéricos ya conocidos.

En primer lugar se presenta una síntesis que abarca conceptos básicos relacionados con ellos.

Además se proponen actividades de aprendizaje para ejercitar las operaciones y la aplicación de propiedades.

Dado que en el título de la Unidad aparece la palabra conjuntos y considerando que se necesitan algunas nociones acerca de este tema, se incluye la notación y las definiciones principales en el Apéndice A que aparece al final del libro.

Allí también se presentan otros Apéndices que contienen los siguientes temas: Sistema de Unidades; Notación Científica; Aproximación y redondeo; Cifras Significativas y Fórmulas más usadas para el cálculo de perímetro, área y volumen.

1.1.- Los números naturales

Los números naturales son aquellos que se usan para contar y numerar. Este conjunto numérico presenta el 1 como primer elemento, pero no tiene último elemento.

La notación que se emplea para identificar el conjunto de números naturales es: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Algunas propiedades importantes son:

- N es un conjunto discreto porque entre dos números naturales siempre hay un número finito de números naturales.
- Todo número natural a, tiene su sucesor $a+1$.
- Tanto la suma como el producto de números naturales es un número natural, en cambio no sucede lo mismo con la resta y la división.
- Un número natural se puede expresar como producto de otros números naturales, que se llaman factores o divisores del primero.

Ejemplo: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

1.2.- Los números enteros

El conjunto de los números enteros es una ampliación del conjunto de los números naturales. La necesidad de restar $3-8$, por ejemplo, justificó la creación de los números negativos.

Al conjunto formado por los números naturales, sus correspondientes negativos y el cero se lo llama **conjunto de los números enteros**.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Números naturales}: N \\ 0\ (\textit{cero}) \\ \textit{Números negativos} \end{array}\right\} \textit{Números enteros}: Z$$

La notación que se usa para identificar al conjunto de los números enteros es: $Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Propiedades importantes:

- Z no tiene primero ni último elemento, cada número tiene un antecesor y un sucesor.
- Z es un conjunto discreto.
- Todo número entero a tiene su opuesto $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.
- Al realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación de números enteros, siempre se obtiene como resultado un número entero.

1.3.- Los números racionales

La necesidad de realizar la división $3 \surd 8$, por ejemplo, en la que el dividendo no es múltiplo del divisor, justificó la creación de los números fraccionarios. Para indicar la operación $3 \surd 8$ se usa la fracción $\frac{3}{8}$ y se lee tres octavos.

En un número fraccionario $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$; a recibe el nombre de numerador y b se llama denominador.

Al conjunto formado por los números enteros y los fraccionarios se lo llama **conjunto de los números racionales** y se lo designa con el símbolo Q.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \textit{Números naturales}: N \\ 0\ (\textit{cero}) \\ \textit{Números negativos} \end{array}\right\} \textit{Números enteros}: Z \\ \textit{Números fraccionarios} \end{array}\right\} \textit{Números racionales}: Q$$

Los números racionales son aquellos que se pueden escribir como cociente de dos números enteros. La única condición es que el denominador sea distinto de cero.

Estos números se pueden expresar de distintas formas, por ejemplo:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = 0{,}25 = \ \ldots$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5 = \frac{15}{10} = 1\tfrac{1}{2} = \ldots$$

$$-\frac{20}{10}=\frac{-20}{10}=-2= \ \dots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=0{,}3333\ldots=0{,}\overset{\frown}{3}= \ \dots$$

$0{,}25$; $1{,}5$; $0{,}\overset{\frown}{3}$; … se llaman expresiones decimales de un número racional. Algunas de estas expresiones presentan un número finito de cifras decimales mientras que otras tienen un desarrollo decimal periódico.

Propiedades importantes de este conjunto numérico:

- ∞ Entre dos números racionales existen infinitos racionales, por eso se dice que Q es un conjunto denso. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.
- ∞ Q no tiene primero ni último elemento.

1.4.- Los números irracionales

Hay números que se caracterizan porque tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Estos números se llaman *irracionales*, ya que no se pueden expresar nunca como **cociente** o **razón** de dos números enteros.

Son números irracionales:

- ∞ Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural. Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$.
- ∞ Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero. Por ejemplo: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-5}$, $\sqrt[7]{13}$.
- ∞ Números de gran importancia en Matemática, como el número π, que se utiliza para calcular la longitud de la circunferencia; el número e, base de los logaritmos naturales; etc.

El **conjunto de los números irracionales** se designa con la letra I .

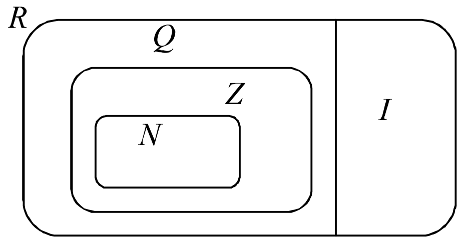
1.5.- Los números reales

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los números reales y se lo designa con R .

Por lo tanto, $R=Q\cup I$, donde el símbolo $\cup$ indica la operación unión entre conjuntos (Ver Apéndice A Conjuntos).

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Números naturales : } N \\ 0\,\text{(cero)} \\ \text{Números negativos}\end{array}\right\}\ \text{Números enteros : } Z \\ \text{Números fraccionarios}\end{array}\right\}\ \text{Números racionales : } Q \\ \text{Números irracionales : } I\end{array}\right\}\ \text{Números reales : } R$$

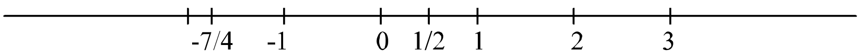
A continuación se presenta un diagrama de Venn que muestra gráficamente la relación existente entre los conjuntos numéricos vistos.



1.6.- Representación gráfica de los números reales

El conjunto de los números reales se representa gráficamente sobre una recta que se conoce con el nombre de *recta real* o *recta numérica*.

Se fija un punto origen que representa el número 0 y se establece un segmento unidad. Los números reales positivos quedan representados a la derecha del cero y los reales negativos a la izquierda, tal como se muestra en la figura.



A cada número real le corresponde un único punto de la recta y cada punto de la recta representa un único número real. Por esto se dice que existe una correspondencia *biunívoca* entre los puntos de la recta y los númerosa reales.

1.7.- Valor absoluto de un número real

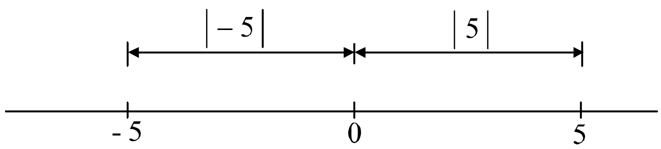
Para indicar valor absoluto de un número real x, se usa la notación $|x|$.

Se define $$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, el valor absoluto de x es la distancia entre el punto de la recta representativo del número x y el origen (cero).

<u>*Ejemplo:*</u>

$$|5| = 5 \qquad\qquad |-5| = -(-5) = 5$$



Otra forma de expresar el valor absoluto de un número real x es: $|x| = \sqrt{x^2}$

Ejemplo:

Si $x^2 = 36$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$

Resulta $|x| = 6$ y por lo tanto: $x = 6$ o $x = -6$.

1.8.- Intervalos en la recta real

La representación de los números reales en la recta numérica permite visualizar que este conjunto es totalmente ordenado.

Dados dos números reales distintos a y b, siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor o mayor.

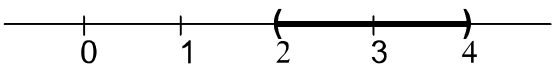
Es decir, se verifica alguna de las siguientes desigualdades: $a < b$ o $a \leq b$ o $a > b$ o $a \geq b$.

Con frecuencia, es necesario trabajar con subconjuntos de los números reales, expresados de acuerdo con alguna relación de orden, por ejemplo: los números reales mayores que 2 y menores que 4 .

La expresión anterior puede escribirse empleando la siguiente desigualdad: $2 < x < 4$.

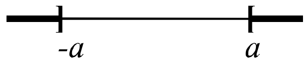
El subconjunto al que se hace referencia es $A = \{x \in R \mid 2 < x < 4\}$ (Ver Apéndice A Conjuntos).

Este subconjunto también puede indicarse a través del intervalo abierto $(2,4)$ cuya representación gráfica es la que se muestra en la figura. El intervalo es abierto porque no contiene los extremos 2 y 4, lo que se indica con el uso de paréntesis.



En la siguiente tabla se muestran algunas desigualdades con los correspondientes intervalos

Desigualdades	Intervalo	Tipo de intervalo	Representación gráfica
$a < x < b$	$x \in (a,b)$	Abierto	
$a \leq x \leq b$	$x \in [a,b]$	Cerrado	
$a \leq x < b$	$x \in [a,b)$	Semiabierto	
$a \leq x$	$x \in [a,+\infty)$	Infinito	

$\lvert x \rvert < a \Rightarrow -a < x < a$	$x \in (-a, a)$	Abierto	
$\lvert x \rvert \geq a \Rightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a$	$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$	Unión de intervalos infinitos	

En la notación $(a, b]$, el paréntesis (indica que a no pertenece al intervalo, mientras que el corchete] indica que b sí pertenece al intervalo.

1.9.- Operaciones con números reales

Dada la importancia que tiene operar correctamente con números reales y en vista de los inconvenientes que suelen presentarse en este sentido, se recuerdan algunas reglas básicas para realizar operaciones, especialmente aquellas que involucran números fraccionarios.

1.9.1.- Suma

- Con igual denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad con \quad b \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

- Con distinto denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \quad con \quad b \neq 0 \quad y \quad d \neq 0$$

O bien

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(m:b)a + (m:d)c}{m} \quad \text{con} \quad b \neq 0 \quad \text{y} \quad d \neq 0$$

donde m es el múltiplo común menor de b y d.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$$

1.9.2.- Producto

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad con \quad b \neq 0 \quad y \quad d \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$$

1.9.3.- Cociente

$$\frac{a}{b} \surd \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{con} \quad b \neq 0 \ , \ d \neq 0 \quad \text{y} \quad c \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} \surd \frac{2}{7} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

1.9.4.- Potenciación

Se recuerda que $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ veces}, \qquad n \in N$.

El número a recibe el nombre de base, y n es el exponente.

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \ , \quad a \neq 0 \qquad\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ , \quad a \neq 0$$

1.9.5.- Radicación

$\sqrt[n]{a} = b$ si y sólo si $b^n = a$, $n \in N$

El número a recibe el nombre de radicando, n es el índice y el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical.

En la radicación de números reales, si el índice n es par, el radicando a debe ser mayor o igual que cero, de lo contrario el resultado no es un número real.

Se recuerda que:

∞ Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$

∞ Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

1.10.- Propiedades de las operaciones definidas en *R*

Se presenta a continuación un listado de las principales propiedades de las operaciones con números reales.

1.10.1.- Propiedades de la suma

Conmutativa: $a + b = b + a$

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Elemento neutro: 0 (cero) tal que $a + 0 = a$

Opuesto aditivo: cada número real a tiene su opuesto aditivo $(-a)$ tal que $a + (-a) = 0$

1.10.2.- Propiedades del producto

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Elemento neutro: 1(uno) tal que $a \cdot 1 = a$

Recíproco: cada número real $a \neq 0$ tiene su inverso multiplicativo o recíproco $\left(\frac{1}{a}\right)$ tal que $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$

1.10.3.- Propiedad distributiva que combina las operaciones de suma y producto

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$

$c \cdot (a-b) = c \cdot a - c \cdot b$

$(a+b) : c = a : c + b : c$ Esta igualdad, considerando el recíproco de *c*, también puede expresarse como producto, del siguiente modo: $(a+b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$(a-b) : c = a : c - b : c$ o bien $(a-b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$

1.10.4.- Propiedades de la potenciación y de la radicación

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n, \quad b \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n : a^m = a^{n-m}, \quad a \neq 0$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}, \quad b \neq 0$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad m \in Z, \quad n \in N$. En particular $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.	

1.11.- Racionalización de denominadores

A veces, cuando se resuelven cálculos o problemas se obtienen fracciones con números irracionales en los denominadores, como por ejemplo $\frac{3}{\sqrt{3}}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$; $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; etc.

Para transformar estas fracciones en otras equivalentes pero con denominadores racionales, se usa un procedimiento llamado racionalización.

A continuación se recordarán algunas reglas para racionalizar denominadores, aunque actualmente se utiliza cada vez menos este procedimiento debido a que se cuenta con calculadoras y computadoras que facilitan los cálculos.

Se considerarán los siguientes casos:

a. El denominador es un radical único irreducible de índice 2.

Ejemplo:

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Se multiplica numerador y denominador de la fracción por el mismo radical del denominador.

b. El denominador es un radical único irreducible de índice distinto de 2.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2\cdot 2^2}}=\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

En general, para racionalizar una fracción de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, con $b\neq 0$, se procede como sigue:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

c. El denominador es un binomio de la forma $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ó $a\pm\sqrt{b}$ ó $\sqrt{a}\pm b$.

Para comprender el procedimiento a usar en este caso, se debe tener en cuenta que $(p+q)\cdot(p-q)=p^2-p\cdot q+q\cdot p-q^2=p^2-q^2$, con $p,q\in R$.

Ejemplo:

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2-3}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{-1}=-4\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$